素 朴 集 合 論

P.R. ハルモス著
富 川　　滋 訳

ミネルヴァ書房

Soboku Shūgōron

Japanese translation by

Shigeru Tomikawa

Paul R. Halmos

Naive Set Theory

序

すべての数学者は集合論をいくらか知っていなくてはならない，ということにはすべての数学者が同意する。ところがそのいくらかというのをどこまでと定めようとすると意見が分れ始める。この書物はその問題に対するわたくしの答を含むものである。この書物の目的は高等数学の初学者に基本的な集合論上の生きた事実を教えること，しかも最小限の哲学談義と論理式を用いてやることである。全体を通じての観点は，群や積分や多様体の研究を熱望する見込みの数学者の観点である。こうした観点からすれば，この書物の概念や方法はただすこしばかりの標準的な数学上の道具にすぎない。熟達した専門家はここには何の新らしいものを見つけることもないであろう。

学術的に文献への依拠や引照をしていくことはこの書物のような純解説的なものでは場違いである。しかしながら集合論そのものに興味をいだくようになった学生は，その主題にはこの書物にあるよりずっと多くの事柄があることを知るべきであろう。集合論の智慧のもっとも美しい資料の1つは今もってハウスドルフ (Hausdorff) の『集合論』(*Set theory*) である。この方面の文書に最近追加され，しかも読んで大へん面白く，広汎でまた今日にふさわしい文献表もついているのは，スッピース (Suppes) の『公理的集合論』(*Axiomatic set theory*) である。

集合論では「素朴」と「公理的」とは対照的な語である。本書の取扱い方は素朴な観点からする公理的集合論だとでもいえばもっともうまく記述できるのではなかろうか。集合論のためのいくつかの公理がたてられ，またそれが後続する一切の証明の基本として使われるという点では公理的で

ある。言語や表記が日常的非形式的な（ただし形式化可能な）数学のものであるという点では素朴である。素朴な観点の方がもっと重要な仕方で優位を占めているのは，集合論が事実の集積（body of facts）とみなされていることにあり，そこでは公理はそれについての手短で便利な要約となる。それに対し本筋をいく公理的な観点ではさまざまな公理の間の論理的な関係が研究の中心をなす対象となる。類比的にいうと，幾何学の研究は折紙細工に類する直観だけに基づいて進められれば純粋に素朴なのであり，もう一方の極端である純粋に公理的な研究とは，さまざまな非ユークリッド幾何学の公理がユークリッドのと同じだけの注意を払って研究されているようなものをいうのである。この書物の観点はユークリッド幾何のみを記述する意図でただ一組の穏健な公理だけを研究することと類比される。

『素朴集合論』の代りにこの書物のもっと正直な標題を探せば『素朴集合論の初歩の概観』とでもなったであろう。「初歩」という語で読者はここにすべてがあるわけではないことに気付くであろうし，「概観」という語ではここにあるものにしてももっと充填を要するということに気付くであろう。文体はふつう会話体といってよいほどに非形式的である。装いをこらした定理はほとんどなく，事実はたいてい陳述されるだけで，一般の叙述的な講義程度だと思うが，証明のスケッチがつけてある。はっきり銘うった練習問題というのは極く少ないが，実際はこの書物の大部分がヒントつきの長い練習問題の連鎖に外ならない。読者はたえず，1つのヒントから次のものへとどうして飛躍できるかわかっているのか，と自問し続けるべきであろう。したがってまた自分の読んでいく速さが普通よりずいぶん遅いと気付いてもがっかりしてはならない。

この書物の内容は並外れて難かしく深遠だなどとは言えない。実のところは概念が極めて一般的で極めて抽象的だということ，だからいくらか慣れが要求されるだろうということなのである。しかしながら，定理はより

一般的にあてはまるほど深さの減るものだというのは数学の常である。集合論を学ぶに際しての学生の仕事は，不慣れなしかし本質的には浅い一般的な概念に，ほとんど意識的な努力などしないでそれらが使えるほど慣れ親しむまで没頭することである。言い換えれば，一般集合論というのはほんとうはかなり自明な材料なのである。しかし数学者になろうというのならそれがいくらか必要である。そしてそれはここにある。まず読むことだ，吸収することだ，そして忘れることだ。

P. R. H.

目　次

第1節　外延性公理

狼の群，ぶどうの房あるいは鳩の集団などはみなものの集合の例である。数学上集合の概念は一切のこれまでに知られた数学の基礎として使うことのできるものである。この小著の目的は集合の基本的な性質を展開してみせることである。ついでに言えば，用語法の単調さを避けるために，われわれは時に集合（set）の代りに集まり（collection）と言うこともあろう。「類」（class）という語もまたこうした文脈中で使われるが，それにはわずかながら危険がある。その理由は集合論への進入路には「類」という語に特種な専門的な意味をもたせるものがあることである。この点はまた少し後で言及する機会があるはずである[1]。

この集合論の展開中に含まれないものにまず集合の定義がある。その事情はよく知られた初等幾何学への公理的な進入と類比的である。その進入では点や線の定義は与えられない。その代りそこにはそうした対象を使ってできることは何であるかが述べられる。ここに採用する準公理的な観点では，読者が集合とは何かについて日常的，人間的そして（しばしば誤りもする）直観的な理解をもっているものと仮定する。この解説書の目的はそれを使って正しく行なえる多くのことのうちいくらかの輪郭を描き出すことなのである。

集合はふつう考えられるように要素（elements）あるいは元（members）をもっている。集合の要素は1匹の狼のことも1粒のぶどうのことも1羽の鳩のこともあるであろう。知っておかなければならない重要なことは，

集合自身がまたある他の集合の要素になることもあるということである。数学には集合の集合の例がいっぱいある。たとえば，線は点の集合で，面内のあらゆる線の集合は（点の）集合の集合の自然な例である。驚くべきことは集合が要素として現われることもあるというよりむしろ数学の目的にとってはそれ以外のどんな要素もおよそ考慮する必要がないということである[2]。特に本書では集合，集合の集合，そして同様にして時にびっくりするほどの高さと複雑さに達する〔集合の〕塔[3]を研究するので，その他の何を研究するのでもない。例としてたまたまキャベツや王様といったようなものの集合を口にすることはあるかもしれないが，そうしたものを使うのはいつでももっぱら事情をわかりやすくするためのたとえ話として作りあげるだけで，現に展開中の理論の一部としてではないのである。集合論の根本概念は，つまり完全に公理化された研究で根本的な原始（無定義）概念[4]となるものは，所属 (belonging) という概念である。x が A に所属する（x は A の要素である，x は A に含まれる (contained)）なら，

$$x \epsilon A$$

と書くことにしよう。ギリシャ文字エプシーロンのこの字体はあまりよく所属をあらわすのに使われるので他のどんなことを示すために使うこともほとんど禁じられているくらいなものである。たいていの著者は ϵ をその集合論上の用法へと永久追放してしまって，ギリシャ語のアルファベットの第5番目の文字が入用なときは ε を使うようである。

集合論での用字作法に関してちょっとばかり脱線しておくのもおそらく役に立つことであろう。前の文段でのように小文字〔x〕と大文字〔A〕を使う使い方には何の強制理由もない。われわれはそれを $x \epsilon y$ や $A \epsilon B$ のように書いてもよかったろうし，また今後しばしばそのように書くこともあろう。しかしながら可能な場合はいつでも，そこで考慮されている特定の段階構造の中での集合の位置づけを，アルファベットの初めの方にある文

字で要素を示し，終わりの方の文字でそれを含む集合を示すとか，また同様に比較的単純な種類の文字は要素を示し，より大きなそして飾りの多い活字はそれを含む集合を示す，といった規約によって，非形式的に指示すべきであろう。例：$x\epsilon A$，$A\epsilon X$，$X\epsilon \mathfrak{C}$。

集合の間に考えられる関係で所属よりももっと初歩的なのは，相等（equality）である。2つの集合AとBの相等はすべてよく知られた記号で

$$A=B$$

として示し，AとBが等しくないという事実は

$$A\neq B$$

と書いて表わされる。

所属の最も基本的な性質は相等に対する関係であって，それはつぎのように定式化できる。

外延性公理（axiom of extension）　2つの集合はそれらが同じ要素をもつとき，かつそのときにかぎって相等しい。

もっと気取って，しかし明せきさは犠牲にして言えば，集合はその外延によって決定される，ということになる[5]。

外延性公理が相等の論理上必然的な性質であるばかりでなく，所属に関する自明とはいえない言明でもあることは理解しておかなくてはならない大切なことである。要点の理解にいたる1つの道は，一部では類比的な状況でありながら外延性公理にあたるものは成り立たない，といった状況を考えてみることである。たとえば，集合の代わりに人間を考えてみることにしよう。そしてxとAが人間であるならxがAの先祖であるときはいつも $x\epsilon A$ と書くとしよう。（ある人間の先祖[3]とは，両親，両親の両親，その両親等々である。）外延性公理にあたるものはここではつぎのように言われることになるであろう。もし2人の人間が相等しければ彼らは同じ先祖

をもち（これは〔外延性公理の〕「そのときにかぎって」の部分〔十分条件の側〕で，かつこれは真である），またもし2人の人間が同じ先祖をもてば彼らは相等しい（これは「のとき」の部分〔必要条件の側〕で，かつそれは偽である)。

AとBが集合でかつAのすべての要素がBの要素であるならば，AはBの部分集合 (subset) であるとかBがAを包含する (include) と言い，

$$A \subset B$$

または

$$B \supset A$$

と書く。この定義の言葉づかいは各集合はそれ自身に包含される ($A \subset A$) とみなされなくてはならないことを含意している。この事実は集合の包含関係は反射的 (reflexive) であると言うことで記述される（この語の同じ意味で相等もまた反射的であることに注意せよ)。もしAとBが $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるような集合のときは真正の (proper) という語が用いられる（真部分集合 (proper subset)，真包含 (proper inclusion))。A, B および Cが $A \subset B$ かつ $B \subset C$ であるような集合ならば $A \subset C$ である。この事実は集合の包含関係は推移的 (transitive) であると言うことで記述される。（相等はこの性質もまたもっている。）

AとBが $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるような集合だとすればAとBは同じ要素をもち，それゆえ外延性公理によって $A = B$ である。この事実は集合の包含関係は反対称的 (antisymmetric) であると言うことで記述される。（この点で集合の包含関係は相等と異なった振舞いをする。相等は $A = B$ ならば必然的に $B = A$ であるという意味で対称的 (symmetric) である[6])。外延性の公理は事実これらの用語でつぎのように定式化しなおすことができる。すなわち，AとBが集合であるならば $A = B$ の必要十分条件は $A \subset B$ と $B \subset A$ がどちらも成り立つことである。このことに対応して2つ

の集合AとBの間の相等の証明はほとんどすべて2つの部分に分かれ，まず $A \subset B$ を示し，それから $B \subset A$ を示すことになる。

所属（ϵ）と包含（$\subset$）は概念としてほんとうにまったく別のものであることを見ておこう。1つの重要な相異は上記ですでに明らかになってしまった。というのは包含はつねに反射的であるが一方所属がいつも反射的だというようなことはいっこうに明らかではないのである。すなわち $A \subset A$ はつねに真であるが $A \epsilon A$ はいったい真なのであろうか？　誰もがいつもみてきたようなわかりよい集合のどれについてもそれは確かに真ではない。同じ線に沿って，包含は推移的であるのに一方所属はそうでないことも見ておこう。日常的な例が，たとえば組織を元とする上部組織の場合を含めて，興味をいだいている読者にはすぐ浮んでくることであろう[7]。

註

1. 後の第3節末尾の文段（20頁）参照。なお，そこについている訳註6や，つぎの註2をも見られたい。

2. 他の集合の要素になれるような集合だけを考えて数学は構成できる，ということで，そのような集合のみを‘set’とし，他の集合の要素になれないような集合を固有類（proper class）――第2節後半に出てくるラッセルのパラドクスを導くような集合――と呼んで，set と proper class を併せて「類」(class) とするのが，前註にかかわる視点からの道具立てである。

   なお，少し先走ることにもなるが補足的に言っておくと，集合から集合の集合へさらにまたその集合へというように上昇階段を上る代りに，集合の要素としての集合へ，そしてまたその要素へと下降していけば，最下層には「もうそれ自身は要素を含まないもの」が要請されよう。それは「個体」(individual) とふつう呼ばれる。常識的には個体は1匹の狼や1粒のぶどうなどを意味すると受取られ，それらはもう集合でないとみなされる。そこで今度はもう一度逆にそうした個体からその集合へ，そして集合の集合へ，というふうに構築していくのが堅固で具体的直観的にわかりやすい方法ということにもなろう。

   数学もそのように構成されていくと考えれば，要素として集合以外の個体を

要し，しかもあらゆる集合は結局それらの個体の離合集散によってつくられることになるから，ここの本文の立言に反することになる。しかしこの考えは早計であることを指摘しておかなくてはならない。「それ自身には要素を含まない個体」は集合ではない，とする断定が問題なのである。結論を急いで手短かに言えば，第3節の始めに出てくる「空集合」(empty set) というのが存在し，それは「要素をもたない」が「集合」なのである。そしてたとえば，第11節に進めばわかるように，空集合を唯一の個体にとってそれからあらゆる数を構成していくこともできるのである。ここの本文はそのように理解すればよいであろう。

もちろん集合 (set) にならない個体を容認する立場からの構成もあり得る(本書第11節76頁でもそのことに一言ふれてある)。集合論を立てていくときの全考察領域の中に入る個体とみなされるものの選び方としては，フレンケル (Fraenkel) によって言うと (Bernays-Fraenkel, [1], p. 7),

i) 1つの空集合および他の個体,
ii) 空集合は除いた個体,
iii) 空集合のみ,

という3つが考えられ，i)はツェルメロ (Zermelo) やアッケルマン (Ackermann) などが採用し，ii)は1936年以来のクワイン (Quine) が採り，iii)は最初にフレンケルが1921～1922年に唱えて，ノイマン (v. Neumann)，ベルナイス (Bernays) などが従った。本書もこのiii)をとるのである。

3.「塔」(tower)という語は後に第16節(109頁)で陽表的に定義される術語としてまた出てくるが，ここでは気楽に高層構築ぐらいの意味にとっておいてよかろう。

なおつぎの3頁に出てくる「先祖関係」(ancestor) という語も，第22節(148頁) の定義まで気楽に読んでおけばよい。

4. 公理的な方法では，できるかぎりの語(記号)には定義を与え，できるかぎりの文(命題)には証明を要求するが，少数の語は無定義の原始用語とせざるを得ないし，少数の文(および推論規則)は無証明で公理扱いせざるを得ない。

5.「外延」(extension) という語はここで公理の呼名に使われているが，たしかにあいまいである。本書の中に限ってもそれはまず第3節末の「類」への言及に際して使われているようなこことはすこし違う語法をもつし，もっと違う用法としては第8節で関数について使われる「拡張」という意味の使い方(56頁)

もみられる。ここではただ公理の呼名として，あるいはせいぜい性質よりもむしろ「要素（存在）に視点をしぼった」くらいの意味にとって，外延・内包についての哲学談義などしないのが著者の意に添うことになるであろう。もしそうした哲学がかった吟味もしておきたい向きは，Carnap，[1]（邦訳あり）などを手懸りにして考えられればよかろう。「訳者あとがき」（173頁）も参照。

6. 関係一般を考えるうえで，これらの反射，対称，推移，反対称などの性質は大切であり，そうした考察は第7節であらためてとりあげられる。

7. 下部組織のメンバーはかならずしも上部組織のメンバーではない。

第2節　分出公理

集合論の基本的な原理は，外延性公理を唯一の例外として，すべて既成のものから新たな集合を作り出すもくろみによるものである。このような集合製造の基本原理のうち最初のまたもっとも重要なものは，大雑把に言えばつぎのようになる。１つの集合の要素について知性のある者が立言できるような事柄はどんなことでも１つの部分集合，すなわちその立言が真になるような要素からなる部分集合を特定する〔分出する〕。

この原理を正確な用語で定式化するまえに，その発想順を示す例を１つ見ておく。Aをすべての人間の集合としよう。「xは結婚している」という文は，Aの要素xのあるものについては真で他のものについては偽である。われわれがこの例で明らかにしようとしている原理とは，与えられた集合Aから，与えられた文によって分出される部分集合（すなわちすべての結婚している人の集合）への移行を正当化するものなのである。部分集合のこうした生成を指示するには，ふつうつぎのように表記する

$\{x \epsilon A : x$ は結婚している$\}$。

同様に

$\{x \epsilon A : x$ は結婚していない$\}$

はすべての独身者の集合であり，

$\{x \epsilon A : x$ の父はアダムである$\}$

はカインとアーベルを含みほかには何も含まない集合で，また

$\{x \epsilon A : x$ はアーベルの父である$\}$

はアダムを含みほかには何も含まない集合である。警告しておくが，１個の帽子を含みほかには何も含まない箱は１個の帽子と同じものではない。そして同じ伝で，上記の一連の例の最後の集合をアダムと混同してはいけない。集合と箱の間のこの類比は多くの弱点をもっているが，時には事実の有用な描像を与えてくれることもある。

上記の例の底にある精密な一般的定式を得るのに欠けているものは文 (sentence) の定義だけである。つぎにとり急いだ非形式的な定義をあげる。まず２つの基本的な型の文，すなわち，所属の立言

$$x \in A$$

と相等の立言

$$A = B$$

とがある。他の一切の文はそれらの原子文 (atomic sentence) から，最低限の文法上の作法と一義性[1] だけに服従するふつうの論理演算子 (logical operator) を反復適用することによって得られる。定義をもっと陽表的に（そしてもっと長く）するには，そこに「ふつうの論理演算子」の一覧と構文規則を添える必要がある。前者の十分な（そして実際は過剰な[2]）一覧表は７つの項目を含んでいる。

かつ (and),
または (or)（いずれか一方または両方という意味で),
ない (not),
もし―ならば― (if—then—)（または，含意する),
―のとき，かつそのときにかぎり― (if and only if),
ある―があって (for some)（または，存在する),
すべての―について (for all),

文構成の規則に関しては，それらはつぎのように述べることができる。(i)「(で) ない」を文の後におき結果を括弧でくくれ（括弧を要する理由は，

ここでもまた以下でも，一義性を保証するためである。ついでに，括弧があれば他の一切の句読符号は不要になることに注意しよう。文の定義の要請どおり完全に括弧を装着することはめったに必要ではない。われわれはいつも混乱に導かずに省けると思われるかぎりの括弧は省いていく。正規の数学をやっていくときには，この書物でもそうであるが，いくつもの違った形や大きさの括弧が使われる。しかしそれは見てよくわかるためだけである）。(ii)「かつ」「または」または「のとき，かつそのときにかぎり」を2つの文の間におき，その結果を括弧でくくれ。(iii)「もし—ならば—」の「—」を文で置きかえて，その結果を括弧でくくれ。(iv)「ある—があって」または「すべての—について」の「—」を文字で置きかえ，その後に文を続けて，その全体を括弧でくくれ。（もし使われる文字が後につけた文の中に現われなくても，故障はない。ふつうのかつあたりまえの規約にしたがって「ある y があって $(x \epsilon A)$」はただの「$x \epsilon A$」だけを意味する。同じように，使われる文字がすでに「ある—があって」や「すべての—について」とともに使われていても故障はない。「ある x があって $(x \epsilon A)$」は「ある y があって $(y \epsilon A)$」と同じ意味であることに留意すれば，記号〔文字〕を慎重に変えて，いつでも文字の抵触は回避できるという結論が導けるからである。）

これでしばしばそのドイツ語名 Aussonderungsaxiom で指示される集合論の大原理を定式化する準備ができた。

分出公理 (axiom of specification) いずれの集合 A に，またいずれの条件 $S(x)$ に対しても，$S(x)$ を成り立たせるような A の要素 x だけを要素とする集合 B が対応する。

ここで「条件」とは文に他ならない。上の記号〔$S(x)$〕は文字 x が $S(x)$ という文中で自由であることを示そうという意図をもっているが，それは，

x が $S(x)$ の中で少なくとも1回は「ある x があって」とか「すべての x について」という句のどちらにも先導されることなく現われる，という意味である[3]。分出公理が一意的に集合 B を分出するということは外延性公理から直ちに得られる帰結である。B が A と $S(x)$ とから得られるという手順を示すために，

$$B=\{x\epsilon A : S(x)\}$$

と書くのがならわしである。

分出公理のおもしろくてまた有益な応用例を得るために，$S(x)$ の役を演ずるものとして，

$$(x\epsilon x) \text{ でない}$$

という文を考えよう。ここで，以後もずっとそうなのであるが，「$(x\epsilon A)$ でない」という文の代わりに（「$x\notin A$」でもよいが）「$x\epsilon' A$」と書く方が便利だと思う。そこでこの記号法でいくと，いま $S(x)$ の役を演ずるのは，

$$x\epsilon' x$$

となる。すると，集合 A は何であっても，もし $B=\{x\epsilon A : x\epsilon' x\}$ ならばすべての y について，

（＊）　$(y\epsilon A$ かつ $y\epsilon' y)$ のとき，かつそのときにかぎり $y\epsilon B$

という帰結が出てくる。さて，$B\epsilon A$ といえるであろうか？　証明を進めていけば答は否となる。事実，もし $B\epsilon A$ ならば，$B\epsilon B$ がまたいえるか（ありそうもないことにみえるが，明らかに不可能だというものでもない），さもなければ $B\epsilon' B$ である。もし $B\epsilon B$ とすれば，（＊）によって，$B\epsilon A$ という仮定が $B\epsilon' B$ を生み出すことになるが，これは矛盾である[4]。もし $B\epsilon' B$ ならば，また（＊）によって，$B\epsilon A$ という仮定は $B\epsilon B$ を生み出すが，これまた矛盾である。これで $B\epsilon A$ とすることが不可能だという証明が完了するから，$B\epsilon' A$ が成り立つといわなくてはならない。この結論の最も興味深い部分は，A に所属しないもの（つまりここでの B）が存在

するということである。この論証で集合Aはまったく任意であった。だから言いかえればわれわれは,

どんなものをも含むものはない。　Nothing contains everything.

ということ，あるいはもっと派手にいえば

宇宙なんかない。　There is no universe.

ということを証明してしまったことになる。ただし「宇宙」という語はここでは「論議の宇宙」(universe of discourse) という意味に使われているので，それは，任意の特定の議論で，その議論に入ってくるすべての対象を含む集合，を意味する。

古い（公理論以前の）集合論への進入路では，宇宙の存在が認められていた[5]。そして前段の論証はラッセルのパラドクスとして知られてきたものである。準則とすべきは，何ものにしてもただどりをすること (to get something for nothing) は，特に数学では，不可能だということである。1つの集合を定める（分出する）には，〔「$x \epsilon' x$」といった文をつくる〕呪術的な文句を発音するだけでは不十分なのであって，その呪術的な文句があてはまるような要素をもった集合を現に手にすることも必要なのである。

註

1. この訳書では「一義性」は 'unambiguity' の訳語として使ってある。一方，多くの数学書の例にならって「一意性」を 'uniqueness' にあてた。

2. 「実際は過剰な」というのは，この一覧表の中のいくつかの演算子は他のものを使って同値に言い換えられることを意味する。たとえば，p, q 等で文をあらわすとすれば，「p または q」は「p でなくかつ q でもないことはない」というように「かつ」と「ない」を使って言い換えられる。「もし p ならば q」は「p でありかつ q でないということはない」として，やはり「かつ」と「ない」を使って言い換えられる。また「すべての x について，x は A である」は「ある x があって，その x が A でない，ということはない」(「A でないような x は存在しない」)というように「ある一があって」と「ない」（2回)を使って言い

換えられる。大概の論理学書に出ていることであるから，適当な書物を参照されたい。

結局，この一覧表でいえば，「かつ」から「—のとき，かつそのときにかぎり—」までの演算子中，「ない」はどうしても欠かせないので，「ない」と少なくとももう1つの演算子を選び（ただし「ない」と「—のとき，かつそのときにかぎり—」の2つだけを選ぶことは除く），そして「ある—があって」と「すべての—について」の中からいずれか一方を選べば，残りは全部それらを使って言い換えられることが知られている。

3. 変数(または変項)，たとえばx，が何らかの表現（文(型)）中にあらわれるとき，「自由な現出」(free occurrence) と「束縛された現出」(bound occurrence) を区別しておくことは，厳密な形式化をこなす上で欠かせないことである。なお，分出公理の定式化の中に出てくる‘$S(x)$’という記号は，xを主語に含みSを述語とする文（型）をあらわしているので，気楽には「xはSである」と読んでおいてよい。そしてこの例のxのように自由に現出している変数を含む文（型）は「開放文」(open sentence) と呼ばれ，変数を含むかぎりすべての変数が束縛されて現出するような文(型)は「閉鎖文」(closed sentence) ——狭義の「文」——と呼ばれる。

さて，論理演算子のうち「ある—があって」と「すべての—について」の2つは「量化演算子」(quantifier) と呼ばれ，さらに前のが「存在量化演算子」(existential q.)，後のが「全称量化演算子」(universal q.) と名づけられる。ある文（型）にこれらの演算子がついているとき，それら演算子の影響の及ぶ範囲をその「作用域」(scope) と言う。たとえば，

> すべてのxについて，［xが実数ならば，あるaがあって（aは負でない実数で，$x^2=a$ となる)］

という文（これはxもaも束縛されているので閉鎖文）についてみれば，「すべてのxについて」の作用域は［………］の部分であり，「あるaがあって」の作用域は（………）の部分である。

そこで，変数xが現出するとき，それがその変数を含む量化演算子の作用域内にあれば，それは束縛されて現出していると言われ，そうでなければ自由であると言われる。(本文では「自由」な現出の定義が述べられている。)

分出公理を適用するとき，このxの自由現出に注意すべきであるというのだが，そのことがいくらか痛切に意識されるのは第6節の「射影」の定義(44頁)

のあたりまで進んだときであろうと思われるので，そこでまたふり返って注意することにする。

なお，本書に出てくる公理のうちでは，この分出公理と後の置換の公理（第19節，127頁）だけが‘$S(x)$’とか‘$S(a, b)$’といった開放文を包含しており，その点で他の公理と違ったニュアンスをもっている。そして，他の公理と違ってこの２つはいわば‘S’をきめる毎に新らしい公理がとり出せる公理の無限の束のようなものだというのでノイマン以来「公理型」(axiom schema) という名をつける人もある（たとえば Suppes, [1]）。これらも広く言えば集合を構成する公理であるには違いないが（本節冒頭参照），実は積極的に集合の領域を増大させるよりは，ラッセルのパラドクスを始めとする集合論に関するパラドクスの回避がその期待される主機能なのである。そのためにこのような形になるのであるが，その詳しい理由づけなどはメタ数学でのややこみ入った議論を巻き込むので本書では論じ切れない。

4. ここのいわゆるラッセルのパラドクスにいたる証明過程は，つぎのように考えればわかりやすくなるかと思う。

まず（＊）を書きなおして，

〔{$y \epsilon B$ ならば（$y \epsilon A$ かつ $y \epsilon' y$)}① でかつ，

{($y \epsilon A$ かつ $y \epsilon' y$) ならば $y \epsilon B$}②〕（なる B が存在する）

そして①の｛　｝について y の代りに B を代入すればこの前半の証明になり，すぐ続いている後半の証明は②の｛　｝について同様にすればよいのである。

5.「古い集合論」というのは公理的集合論以前の素朴集合論のことで，その辺の関係については「訳者あとがき」を参照されたい。

ここで「宇宙の存在を認めない」と言われているのは，集合 (set) として認めないということで，第１節の註２にも触れたようにノイマン・ベルナイス・ゲーデル (Gödel) 流の公理的集合論等では「固有類」として別な扱いを受けはするが存在するとされる。

因みに，スッピース (Suppes, [1], p. 7) にしたがって，分出公理によればラッセルのパラドクスが出なくなることを示しておこう。本文では A はいかなる B をも含む（このことは真）と仮定して（A 自身はもはや何の要素でもない）矛盾に陥ることを示したのであるが，A をいまあきらかに集合と言えるものにとってみる。たとえば A は X と Y という２文字の集合だとするのである。A は明らかに A の要素ではない。そこで前註と同じ手続きをとると，

〔{$B\epsilon B$ ならば ($B\epsilon A$ かつ $B\epsilon' B$)}① でかつ,

{($B\epsilon A$ かつ $B\epsilon' B$) ならば $B\epsilon B$}②〕となる B が存在する

となる。いま B に A を代入すると，$A\epsilon A$ も ($A\epsilon A$ かつ $A\epsilon' A$) もともに偽であるから①も②も真となる。

これで矛盾は解消する。

なお超限帰納法（後の第17節）以後では置換の公理がパラドクス回避に役立つことになる。それは前註にも述べたが，また後でも詳述する。

第3節　非順序対

これまで述べてきたこと全部については，われわれは空虚 (vacuum) の中で操作してきたといえなくもない。論議に実質を賦与するために，いま公式に

1つの集合が存在する

と仮定しよう[1]。続いて後にもっと深くもっと有用な存在仮定を定式化するはずであるから，この仮定はほんの一時的な役割を演ずるものにすぎない。この無害なかりそめの仮定からの1つの帰結は，どんな要素もまったくもたない集合が存在するということである。事実，Aが集合であるならば，「$x \neq x$」という文をつかって（あるいは，その代わりに他のどんな文でも恒偽な文をつかって）分出公理をAに適用してみると，その結果は $\{x \epsilon A: x \neq x\}$ という集合になり，そしてその集合は明らかに要素をもたないのである。外延性公理から要素のない集合はただ1つしかありえないことがいえる。その集合のふつうの記号は

$\varnothing$

で，その集合は空集合 (empty set) とよばれる。

空集合はすべての集合の部分集合である。あるいは言い換えれば，すべてのAに対して$\varnothing \subset A$ である。そのことを確証するためにはつぎのように論証してみればよいであろう。証明すべきは$\varnothing$のすべての要素がAに所属するということである。そして$\varnothing$には要素がないのであるから，その条件は自動的に満たされる。この推論は正しいのであるが，おそらくしっく

りしないような気もするであろう。これは「空虚な」(vacuous) 意味でなり立つ条件というよくある現象の典型的な例なので，ここは不慣れな読者のために一言助言しておくのにちょうどよい場所だと思われる。空集合に関して何事かが真であることを証明するためには，そのことが偽にはなり得ないことを証明するがよい。たとえば，いったいどうすれば $\varnothing\subset A$ は偽になるであろうか。$\varnothing$がAに属しない要素をもつ場合にかぎり偽となるのであろう。$\varnothing$にはまったく要素がないのであるから，それは不合理である。そこで結論は，$\varnothing\subset A$は偽にならない，それゆえすべてのAに対して$\varnothing\subset A$，となるのである。

これまで展開してきた集合論は，まだかなり貧弱なものである。というのはわれわれの知っていることといえば，ただ1つの集合があり，しかもそれは空集合だ，ということだけだからである。すべての集合は何かある集合の要素であると確言するに足るだけの集合があるのであろうか。任意の2つの集合に対してその両方がともに所属するような第3の集合があるということは真なのであろうか。3つ，4つ，あるいは任意の数の集合についてはどうであろうか。そうした問を解くためには新たな集合構成の原理がいる。つぎの原理は手始めによいものである。

対(つい)の公理 (axiom of pairing)　任意の2つの集合に対して，その両方が所属するような集合が存在する。

これは上記の2番目の問に対してそのまま肯定の答になっているのに注意してほしい。

取越し苦労をするひとたちを安心させるために，上で使った「2つ」，「3つ」および「4つ」というような語は，それらの名をもつ数学上の概念を指すのではない，ということを急いでことわっておこう。そのような数学上の概念はもっと後の方で定義する[2]ので，さしあたってそれらの語

は「あるものそしてまた他のあるもの」というのを適当な回数だけ繰り返す代りの日常語での縮約形にすぎないのである。そこでたとえば対の公理を縮約されない形でのべれば，a と b が集合であれば，$a \epsilon A$ でかつ $b \epsilon A$ であるような集合 A が存在する，となる。

対の公理の１つの帰結（実は同値な表現）は，任意の２つの集合に対して，その両方を含むが他には何も含まないような集合が存在するということである。事実，a と b が集合なら，そしてまた A が $a \epsilon A$ かつ $b \epsilon A$ であるような集合ならば，A に対して「$x=a$ または $x=b$」という文をつかって分出公理を適用することができるのである。その結果は，

$$\{x \epsilon A : x=a \text{ または } x=b\}$$

という集合で，その集合は明らかに a と b だけを含むのである。外延性公理から，この性質をもつ集合はただ１つしかありえない，といえる。その集合に対するふつうの記号は

$$\{a, b\}$$

で，その場合は a と b でつくられる<u>対</u> (pair)（または後にでてくる概念[3]との比較を強調した言い方では，<u>非順序対</u> (unordered pair)）とよばれる。

かりに，$S(x)$ で「$x=a$ または $x=b$」という文を指すことにすれば，対の公理を

（＊） <u>$S(x)$ ならば，かつそのときにかぎり，$x \epsilon B$</u>

となる集合 B が存在する，と言って表現してみてもよい。集合 A に適用したときの分出公理は

（＊＊） <u>（$x \epsilon A$ でかつ $S(x)$）のとき，かつそのときにかぎり，$x \epsilon B$</u>

というような集合 B の存在を主張している。（＊）と（＊＊）の間の関係はまったくしばしば出てくることがらを典型的に示している。今後に残っている集合構成の原理はみな，（＊）が（＊＊）の擬似特例 (pseudo-special case) であるのと同じ意味で，分出公理の擬似特例である[4]。それらはみなある

条件によって分出される集合の存在を主張する。もし前もって分出〔特定〕される要素をすべて含む集合の存在がわかっているようであれば，それら〔の要素〕だけを含む集合の存在はほんとうに分出公理の特例として出てくるといえるところなのである。

aが集合ならば，非順序対 $\{a, a\}$ をつくることができる。その非順序対は

$$\{a\}$$

であらわされ，aの<u>単集合</u>（singleton）とよばれる。単集合は，aをそのただ1つの要素としてもつ，という言明によって一意的に特性づけられる。だからたとえば$\varnothing$と $\{\varnothing\}$ とはまるで違った集合である。前の方は要素をもたないが，一方後の方は唯一の要素$\varnothing$をもっているからである。$a \epsilon A$と言うことは $\{a\} \subset A$ というのと同値である。

対の公理は，すべての集合がある集合の要素であること，および任意の2つの集合が同時にある同じ1つの集合の要素になること，を確言している。（3つ，4つ，およびそれ以上の集合に対してこれと対応する問には後で答を与えよう[5]）。もう1つここで問題になる註釈は，われわれがこれまでに立ててきた仮定からほんとうにきわめて多くの集合の存在が推論できる，ということである。たとえば$\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$，$\{\{\{\varnothing\}\}\}$，等の集合を考え，それらのうちの任意の2つでできる $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ のような対を考え，なお他に任意の単集合と任意の対からできる混成対を，そしてそのようにして無限に進めていけばよいのである。

〈練習問題〉　このようにして得られるすべての集合は互いに判別できるか。

われわれの集合論の勉強を続けていく前に，ちょっと休んで記号法のことで論議しておこう。（＊）で記述された集合Bを $\{x : S(x)\}$ と表記する

ことはあたりまえと思える。そしてその際考えられた特例では

$$\{x : x=a \text{ または } x=b\} = \{a, b\}$$

となる。われわれはこの記号法をそれが便利だしそうすることが許される場合にはいつも使用していく。すなわち，$S(x)$ の分出〔特定〕する x が集合を構成する，といえるような x についての条件を $S(x)$ が与えているならば，われわれはその集合を

$$\{x : S(x)\}$$

と表記してよいのである。A が集合で $S(x)$ が $(x\epsilon A)$ である場合には $\{x: S(x)\}$ をつくることは許される。それは事実

$$\{x : x\epsilon A\} = A$$

だからである。A が集合で $S(x)$ が任意の文であるときは，$\{x : x\epsilon A$ かつ $S(x)\}$ をつくることが許される。この集合は $\{x\epsilon A : S(x)\}$ と同じだからである。それ以上の例としては，

$$\{x : x \neq x\} = \varnothing$$

で，また

$$\{x : x=a\} = \{a\}$$

であることに注意しておく。$S(x)$ が $(x\epsilon' x)$ である場合や，$S(x)$ が $(x=x)$ である場合には，分出される x は集合を構成しない。

何ものにしてもただどりはするなという格率にもかかわらず，ある種の集合はほんとうは集合ではないとか，またそれらはその名さえ呼んではならない，とか言われれば，いささか手厳しすぎるように思える。集合論への進入路の中には，そうした不法な集合を体系的に使用しはするがただ集合と呼ばないだけだ，というようにしてこの打撃を緩めようとするものもある。その際ふつうに使われる語は「類」(class) である。類とはほんとうは何か，そしてそれはどのように使用されるか，ということについての厳密な説明はわれわれ現在の進入路をとる際には大して関係のないことであ

る。大雑把に言えば，類とは条件（つまり文）あるいはむしろ条件の「外延」と同一視してもよいのである[6]。

註

1. ツェルメロの初期（1908）の公理系では「基本集合の公理」(Axiom der Elementarmengen) という形で空集合（および単集合，非順序対）の存在が要請された。現代でも空集合の存在が公理に立てられている場合（たとえばコーヘンの『連続体仮説』など）や，空集合が基本無定義用語（個体定項）に組み込まれている場合（たとえば Suppes, [1]など）などがあるが，それはそれぞれの集合論の展開される対象領域（第1節註2で触れたように，個体として集合の要素ではあるがそれ自身集合でないようなものを認めるか否か，というようなこと）や展開法との関連で考えるべきことであろう。本書では「数学の目的にとってはそれ〔自身集合である〕以外のどんな要素もおよそ考慮する必要がない」（2頁）ことから，対象領域を集合の世界にかぎるので，その領域には当然「〔少なくとも〕1つの集合が存在する」と仮定して，その領域上に集合論を展開する段での基本原理を公理としていく方針がとられているようである。そしてそうすれば後続の本文で示されるように，空集合の存在は分出公理から直ちに導かれる。(フレンケル (Bernays-Fraenkel, [1]) もそうしている)。

2. 第11節参照。

3. 第6節に出てくる「順序対」(ordered pair) をさしている。

4. [擬似特例」という語の意味はつぎのように受けとってよいであろう。分出公理と本書で呼ばれている命題は，すでに前節の註3で述べたように，1つの公理ではなくて，条件‘$S(x)$’を特定するごとに1つの公理を生ずる「公理型」と呼ぶべきものであった。そこでここの例のように‘$S(x)$’を「$x=a$ または $x=b$」というように特定すれば，分出公理（型）を特定の場合向けに例化した公理になると思える。

しかし，分出公理は，確かに集合として存在すると言える‘A’をもとにして，そのAから定条件をみたす要素xを分出するものである。ところが「対の公理」にあたる（＊）はAを確かな集合としてとってこないで，$S(x)$ だけを特例化しているので「擬似」と言われるわけである。すぐ前に出ているように，$a \epsilon A$, $b \epsilon A$ の言える（そしてa，b以外の要素を含むかもしれない）集合Aの存在

がまず「対の公理」で保証されて，その A から $B=\{x\epsilon A : x=a$ または $x=b\}$ とするなら，それは正真正銘の分出公理（型）の特例である。言いかえれば，「対の公理」(および次節以後の集合構成公理）は「分出公理」を特例化して得られるのではなく，それぞれ独立に立てられるべき公理で，それで存在の保証された集合に対して分出公理を適用（特例化）すれば「対」その他の集合が構成せられる，という事情が「擬似特例」という語で示されているのである。

面倒なようでも，集合論のパラドクスを避けるために分出公理を選べば，いたし方のないことであろう。

5. 第4節の合併集合のところをさす。

6. 前節でも述べられているように，分出公理はラッセルのパラドクスのようなパラドクスを生じさせる対象を集合論の領域に入りこませないために導入された。それは，前もって集合と言える A の要素となる x についてだけ，条件 $S(x)$ をはたらかせること，によってその目的を達しようとするものである。この公理型によって第1節註1にも書いておいた固有類——いかなる他の集合または類の要素にもならない類——は集合論から排除されるので，それに関するラッセルのパラドクスをはじめブラリ・フォルティやカントールのパラドクス——いわゆる狭義の集合論上のパラドクス，は回避できるのであるが，今世紀の開始前後から続々発見されたパラドクスにはもう1つ別の種類のもの——リシャールのパラドクスなどのいわゆる意味論上のパラドクス (semantical paradox)——がいくつかある。この種のパラドクスは集合論の対象から固有類を閉め出しただけで回避し切れるとは簡単には言えない（これら集合論上および意味論上のパラドクスについては，中村，[1] に概略がわかりやすく紹介されている。もっと詳しくは Beth, [1], Part VI などを見るとよい)。そのためには 'x' の定義域だけでなしに '$S(x)$' という条件または文の方にも制限をつけておく，という純論理学的な配慮が必要であると考えられた。

そこで，最初に公理的集合論の体系を与えたツェルメロ (Zermero, [1]；石本，[1]) は，'$S(x)$' を「確定的な性質」(definite Eigenschaft) と限定した。そして，かれのことばで敷衍すれば，「問いや言明は，領域での基本関係〔'ϵ' と '$=$'〕が公理と普遍妥当的な論理法則によって恣意性なしになり立つか否か決定できるとき，確定的 (definite) と呼ばれる」のである。しかしこの言い方はかなりあいまいで，フレンケルはこの「確定的」という語がツェルメロの分出公理の「弱点」であると言う。そしてフレンケル自身ある修正意見を加え

たのであるが (Fraenkel, [1]), それと同値でありながら独立にスコーレム (Skolem, [1], [2]) が出した方法の方がより包括的で使いやすいことがわかった。それ以来，公理的集合論のもっとも典型的な体系――本書も概ねそれによっている――は「ツェルメロ・フレンケル系」あるいは「ツェルメロ・フレンケル・スコーレム系」さらに簡略して **'ZF'** と呼ばれるのである。

そのスコーレムの方法というのは，'$S(x)$' のところに使われる表現の型をきっぱり決めてしまうもので，ごく非形式的にいえば本書の第2節で解明された(9頁)「文」にかぎって使用する――専門的には，'ϵ' と '$=$' を基本述語とする一階述語算にかぎる――とするものである。そういう表現（の型）は「式」(formula) あるいは「整式」(wellformed formula) と呼ばれる。なおもっと詳しい経緯については，Bernays-Fraenkel, [1], pp. 11ff.; Suppes, [1], §1・4 等を見られたい。

そして本節末でのべられているような「類」をとり込む公理的集合論としては代表的に「ノイマン・ベルナイス系」ないし「ノイマン・ベルナイス・ゲーデル系」あるいは縮約して **'NB'** がふつうあげられる（他にクワインの **'ML'** や **'NF'** と呼ばれる体系もある。「ノイマン・ベルナイス・クワイン系」あるいは「モース・ケリー (Morse-Kelly) 系」といわれる集合論の手短かな概観が，邦訳：レモン，[1] である。これによって類に対する扱いを見るのもよい)。しかしいずれにしても本格的な公理的集合論への取り組みは本書の意図を逸脱するので，関心の深い向きは巻末の参考文献などを手懸りにしながらあらためて研究をすすめられたい。

第4節　合併集合と共通部分

AとBが集合であれば，時にそれらの要素を統合して1つの包括的な集合にしてみたくなるのは自然なことである。そうした包括的な集合を記述するための1つの方法は，対 $\{A, B\}$ の2つの元の少なくとも1つに属するすべての要素を含むという要件を出してみることである。この定式化はおのずからどこまでも一般化していくことをそそるものである。たしかに同様な〔集合〕構成はただ集合の対(つい)に対してだけではなく集合の任意の集まりにも適用すべきであろう。言い換えれば，求められているのはつぎのような集合構成の原理である。

合併集合の公理 (axiom of unions) 集合のすべての集まりに対して，所与の集まりの少なくとも1つに属する要素をみな含むような集合が存在する。

これはまたこう言ってもよい。〔集合の〕すべての集まり$\mathcal{C}$に対して，$\mathcal{C}$内にあるXがあって $x \epsilon X$ ならば，$x \epsilon U$ であるような集合Uが存在する。(「少なくとも1つ」というのは「ある」というのと同じであることに注意してほしい)。

上に述べた包括的な集合Uはあまり包括的すぎるかもしれない。それは集まり$\mathcal{C}$内のどの集合Xにも属さない要素を含んでいるかもしれないからである。これは容易に矯正することができるので，つまり，

$$\{x \epsilon U : \mathcal{C}\text{内にある}X\text{があって } x \epsilon X\}$$

という集合をつくるように分出公理を適用するだけでよい。（ここでのこの条件は「あるXがあって（$x\epsilon X$ かつ $X\epsilon \mathcal{C}$）」という数学上はもっと受け容れやすい文の慣用語法への翻訳である）。これから，すべてのxについてxがこの集合に属する必要十分条件は，$\mathcal{C}$内にあるXがあってxがXに所属することである，ということが出てくる。記号法を変えてもう一度この新しい集合Uを呼び出してみれば，

$$U=\{x: \mathcal{C} \text{ 内にある}X\text{があって } x\epsilon X\}$$

となる。この集合は集合の集まり$\mathcal{C}$の合併集合 (union)[1] と呼ばれるが，外延性公理がその一意性を保証することに注意してほしい。Uに対しておよそ現に使われているうちでもっとも単純な記号が数学者仲間にきわめてよくいきわたっているわけではない。それは

$$\bigcup \mathcal{C}$$

であるが，たいていの数学者は

$$\bigcup\{X: X\epsilon \mathcal{C}\}$$

とか

$$\bigcup_{X\epsilon\mathcal{C}} X$$

というような書き方を好む。なおある重要な特例ではその他の代替記法が使われるが，それらはしかるべきところまで進んでから示すつもりである[2]。

当分の間はわれわれの合併集合の理論の勉強をもっとも単純な事実だけに限る。中でももっとも単純な事実というのは，

$$\bigcup\{X: X\epsilon\varnothing\}=\varnothing$$

であって，つぎの単純な事実は

$$\bigcup\{X: X\epsilon\{A\}\}=A$$

ということである。上記の思い切った最単純記法では，これらの事実は

$$\bigcup\varnothing=\varnothing$$

および

$$\bigcup\{A\}=A$$

というように表わされる。これらの証明は定義から直ちに得られる。

集合の対の合併集合にはもうすこしばかりの内実がある。（そしてそれがともかくもここでの論議全体の出発点となる)。その際つぎのような特種な記法が使われる。つまり，

$$\bigcup\{X : X\epsilon\{A, B\}\}=A\cup B。$$

合併集合の一般的な定義から，この場合の特例として，x が A または B またはその双方に属するとき，かつそのときにかぎり $x\epsilon$ $A\cup B$，ということがいえる。そしてそれから

$$A\cup B=\{x : x\epsilon A \text{ または } x\epsilon B\}$$

がでてくる。対の合併集合についてはつぎのような容易に証明できる事実がある：

$A\cup\varnothing=A$,

$A\cup B=B\cup A$　（交換性，commutativity），

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$　（結合性，associativity），

$A\cup A=A$　（巾（べき）等性，idempotence），

$A\cup B=B$　のとき，かつそのときにかぎり $A\subset B$。

数学の学生なら少なくとも生涯に一度は独力でこれらの事柄を証明してみるべきであろう。その証明は，それらの式に対応して出てくる論理演算子のまたはの初等的な性質にもとづいてなされるものである[3]。

同様に単純であるがまったく含みの大きい事実は

$$\{a\}\cup\{b\}=\{a, b\}$$

ということである。その含みというのは対を一般化する方法である。特例としてわれわれは，

$$\{a, b, c\}=\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}$$

と書く。この等式はその左辺の定義になる。右辺には当然その中に〔たとえば $(\{a\}\cup\{b\})\cup\{c\}$ のように〕少なくとも1対の括弧があるべきだと思われるかもしれないが，結合律を考慮すれば，それを省いても誤解が生じることはないわけである。

$$\{a,b,c\}=\{x : x=a \text{ または } x=b \text{ または } x=c\}$$

は容易に証明できるから，ここで，3つの集合をとったすべての場合に，それらを含み他のものは含まないような1つの集合が存在する，ということがわかる。その一意的に決定される集合を，それら〔要素となる3集合〕から作られる（非順序）3個組（(unordered) triple）とよぶのは自然である。このようにしてもっと多くの項に対して導入されるこの記号法や用語法の拡張（4個組（quadruple）等々）は混乱なくわかるところである。

合併集合を作ることはもう1つの集合論上の演算と多くの類似点をもっている。AとBが集合なら，AとBの共通部分（intersection）[4] は

$$A\cap B$$

という集合で，その定義は

$$A\cap B=\{x\in A : x\in B\}$$

である。この定義は別様に見えてもAとBについて対称であって，

$$A\cap B=\{x\in B : x\in A\}$$

が得られる。事実，xがAとBの両方に属するとき，かつそのときにかぎって $x\in A\cap B$ であるから，

$$A\cap B=\{x : x\in A \text{ かつ } x\in B\}$$

が導ける。共通部分についての基本的な事実ならびにそれらの証明は合併集合についての基本事実と相似である。

$$A\cap\varnothing=\varnothing,$$

$$A\cap B=B\cap A,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$$

$$A \cap A = A,$$

$$A \cap B = A \text{ のとき，かつそのときにかぎり } A \subset B。$$

共通部分が空であるような集合の対はまったくよく出てくるので，つぎのような特定の語を使用してもよい。つまり，$A \cap B = \varnothing$ならば集合AとBは<u>互いに素</u>（disjoint）であるといわれる。同じ語が時としては，集合の集まりについて，その中の相異なる 2 つの集合がすべて互いに素になっていることを示すためにも使われる。その代わりにそのような状況のときには<u>対をとれば互いに素な</u>（pairwise disjoint）集まりといってもよい。

合併集合と共通部分についてつぎの 2 つの有用な事実は両方の演算を同時に含んでいる。

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)。$$

これらの等式は<u>分配律</u>（distributive laws）とよばれる。集合論での証明の見本までに第 2 の等式を証明しておく。xが左辺に属すれば，xはAに属するかまたはBとCの両方に属する。もしxがAの中にあれば，xは$A \cup B$ と $A \cup C$ の両方の中にあり，またもしxがBとCの両方の中にあれば，やはり，xは $A \cup B$ と $A \cup C$ の両方の中にある。だから，いずれにせよxは右辺に属するといえる。これは右辺が左辺を包含する〔部分集合とする〕ことの証明になっている。逆の包含関係を証明するには，もしxが $A \cup B$ と $A \cup C$ の両方に属するならば，xはAに属するかまたはBとCの両方に属する，ということをみておけばよい。

2 つの集合AとBの共通部分を作ること，あるいは，集合の対 $\{a, b\}$ の共通部分を作ることと言う方がよいかもしれないが，それはずっと一般的な演算の特例である。（これは共通部分の理論が合併集合の理論を模造しているもう 1 つの点である。）共通部分の一般演算が存在することは，集合の空でない集まりのどれに対しても，所与の集まりのすべての集合に属

する要素だけを正確に含むような1つの集合が存在する，という事実によっている。言い換えれば，$\varnothing$以外の集まり$\mathcal{C}$のどれに対しても[5]，$\mathcal{C}$内のすべてのXについて $x\epsilon X$ のとき，かつそのときにかぎって $x\epsilon V$ となるような集合Vが存在する。この主張を証明するために，Aを$\mathcal{C}$内の任意に特定される集合とし（この段階は，$\mathcal{C}\neq\varnothing$という事実によって正当化される），

$$V=\{x\epsilon A:\ \mathcal{C}\ \text{内のすべての}X\text{に対して}\ x\epsilon X\}$$

と書く。（この条件は「すべてのXにたいして（$X\epsilon\mathcal{C}$ ならば $x\epsilon X$)」の意味である)。VがAを任意に選択することに左右されると思うのは幻覚である。事実，

$$V=\{x:\ \mathcal{C}\ \text{内のすべての}X\text{にたいし}\ x\epsilon X\}$$

だからである[6]。この集合Vは集合の集まり$\mathcal{C}$の<u>共通部分</u>（intersection）とよばれ，外延性公理がその唯一性を保証する。慣用記号は合併集合のものと同類である。すなわち

$$\bigcap\mathcal{C}$$

がなじみは少ないが異論の余地のないものであるのにかかわらず，ふつうは

$$\bigcap\{X:X\epsilon\mathcal{C}\}$$

とか

$$\bigcap_{X\epsilon\mathcal{C}}X$$

というように書き示されるのである。

〈練習問題〉（$A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ の必要十分条件は $C\subset A$ である。この条件は集合Bに何のかかわりもないことをみておけ。

註

1. 合併集合は「結び」と呼ばれることもあり，英語では‘join’という語も使われる。なお，合併集合に対して使われる記号‘∪’はその形から「カップ」(cup)と呼ばれる。

2. すぐつぎの頁に出てくる‘$A \cup B$’という式の記法，および第9節に出てくる族に対する合併集合の記法‘$\bigcup_{i \in I} A_i$’などを指しているのであろう。

3. 第2節9頁でも一言敷衍してあるように，pとqを文としたとき，「pまたはq」はpとqの少なくとも一方がなりたつという意味に使われる。そこで恒偽な文（ϕに対応する）をFと書けば，「または」について，上記集合算の各等式に対応して，

　（pまたはF）$\leftrightarrow p$

　（pまたはq）$\leftrightarrow$（qまたはp）（交換）

　（pまたは（qまたはr））$\leftrightarrow$（（pまたはq）またはr）（結合）

　（pまたはp）$\leftrightarrow p$（巾等）

　（（pまたはq）$\leftrightarrow q$）$\leftrightarrow$（pならばq）

という文計算の同値式（同値の記号を‘$\leftrightarrow$’で示した。「のとき，かつそのときにかぎり」(if and only if) と読んでよい。そして文計算の同値式は集合算の等式に対応する）がなりたつのである。

4. 共通部分は「交わり」と呼ばれることもあり，英語では‘meet’という語があてられることもある。共通部分の記号‘∩’は合併集合の記号との対比から「キャップ」(cap) と呼ばれる。

5. 共通部分が集合の空でない集まりに対してだけ定義されることは注意しておくべきで，つぎの註6でも早速使われる。次節の本文（33頁）にもその解説になる記述がある。

6. ここで，非順序対もそうであるが合併集合の存在は公理によって要請されるのに，共通部分の存在は証明されている，という相違にちょっと眼を向けておくのも，初学者の場合には有益であると思う。その違いの生じてくる点を際立たせてみるとつぎのようである。

　まず「合併集合の公理」は，本文にもあったように，必らずしもその名通り正確に合併集合（だけ）を与えるわけではない。その公理で存在の保証された

集合Uに「分出公理」を適用してはじめて一意的な合併集合がきまるのであった。その辺の本文（24，25頁）と，ここの共通部分の証明のところとをていねいに突き合せてみればよい。つまり，もし合併集合の存在が直接に別個の公理で要請しなくても証明できるものであるとすれば，さしあたり「分出公理」によって証明するしかないであろうが，その際どの集合をもとにして分出すればよいか。本文にあたったように，

$\{x \in U : \mathfrak{C}$ 内にあるXがあって $x \in X\}$

と書けるのは，Uの集合としての存在が保証された後のことであって，いまそのUの存在こそ問題であるというのに，そのUからxを分出するわけにはいかない。$\mathfrak{C}$は所与としてよいが，$\mathfrak{C}$をもとにすれば，xの集合でなくて，Xの集合しか分出されない。求める合併集合を見越して言えば，その合併集合を部分集合に包含するような集合をもとにして分出しなくてはならないのであるが（2つの互いに素な集合の合併集合だけはその対として前節の公理から得られる），そのような集合の存在はあらためて別の公理から出してくる以外にない。そこで直接にその存在を要請して「合併集合の公理」が立てられるのである（なお，前節の註4およびそれに対応する付近の本文を参照すること）。

一方，共通部分の方で見れば，

$V = \{x \in A : \mathfrak{C}$ 内のすべてのXに対して$x \in X\}$

と書くときの‘A’は，空でない集まり$\mathfrak{C}$が所与であるから，$\mathfrak{C}$の要素となる集合として確かに少なくとも1つ存在する。そのようなAならどれをとってきてもよい，その選ばれたAの要素から求める条件をみたす要素xを分出すればよいのである。「どれをとってきてもよい」と言うのは，本文で「Aを任意に選択することに左右されると思うのは幻覚である」とあるのも同じことであるが，$\mathfrak{C}$の要素となっている集合をたとえて A_1，A_2，……，A_n であるとしたとき，求めるのはそれらすべてに共通する要素xの集合であるから，A_1 に属していてまたA_2，……，A_n にもすべて属しているxを分出しても，A_2に属していてまた A_1，A_3，……，A_n にもすべて属しているxを分出しても，結局同じxが分出されるはずだからである。

こうして合併集合と違って共通部分は別個の公理をまたずに分出公理によって存在が証明されるのである。

第5節　補集合とベキ集合

AとBが集合ならば，AとBの差 (difference)，あるいはもっとよく知られた言い方ではAにおけるBの相対補集合 (relative complement) というのは，集合 $A-B$ のことであって，

$$A-B=\{x\epsilon A : x\epsilon' B\}$$

で定義される。この定義では $B\subset A$ を仮定する必要がないことに注意しよう。それでも（この節だけのことではあるが），補集合づくりについての基本的な事実をできるだけ簡単に書きとめるためには，とりだされる集合はみな同じ1つの集合Eの部分集合であるということ，および補集合は（他に特定しないかぎり）みなそのEに関して作られるということ，を仮定しておく[1]。そういう状況では（そうしてそういう状況はまったくふつうであるが）基底になる集合Eはいちいち書き記しておくよりも心にとめておく方がうまくいく。そうすることで記号法を単純化することができるのである。Aの（相対補集合に対する）仮の絶対補集合[2] (temporarily absolute complement) のよく使われる記号は A' である。この記号によって補集合づくりに関する基本事実はつぎのように言明することができる。

$$(A')'=A,$$

$$\varnothing'=E, \quad E'=\varnothing,$$

$$A\cap A'=\varnothing, \quad A\cup A'=E,$$

$B'\subset A'$ ならば，かつそのときにかぎり $A\subset B$。

補集合についてもっとも重要な言明はいわゆるド・モーガンの法則 (De

Morgan laws)，つまり

$$(A\cup B)'=A'\cap B',\quad (A\cap B)'=A'\cup B'$$

である。（やがて，ド・モーガンの法則は対についてだけではなく，もっと大きな集合の集まりの合併集合や共通部分にたいしてもなり立つことがわかる[3]。）補集合づくりについてのこれらの事実は，集合論の定理が通例は対をなして出てくる，ということを含意している。Eの部分集合の合併集合，共通部分および補集合をふくんだ包含式〔$A\subset B$ の形の式〕や等式で，それぞれの集合をその補集合に置き換え，合併集合と共通部分を互換し，包含関係はそのままにしておけば，その結果はまた1つの定理になるのである。この事実は集合についての双対(つい)の原理 (principle of duality)[4] というようによばれることがある。

ここに補集合づくりについての易しい練習問題をあげておく。

$A-B=A\cap B'$。

$A-B=\varnothing$ ならば，かつそのときにかぎり $A\subset B$。

$A-(A-B)=A\cap B$。

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$。

$A\cap B\subset(A\cap C)\cup(B\cap C')$。

$(A\cup C)\cap(B\cup C')\subset A\cup B$。

AとBが集合ならば，AとBとの対称差 (symmetric difference)（またはブール和 (Boolean sum)）というのは集合$A+B$のことであって，

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$

で定義される。この演算は交換$(A+B=B+A)$および結合$(A+(B+C)=(A+B)+C)$ の法則にしたがい，また $A+\varnothing=A$ かつ $A+A=\varnothing$となる。

ちょうどよい時機と思うので，共通部分の理論のうち自明なのであるがたまにはてこずらせるところを解きほぐしておく。まず，共通部分は空でない集まりに対してだけ定義されたことを思い出してほしい。その理由は

空な集まりに対して同じように突込んでいっても集合が定義されないことである。いったいどんな x が

$\varnothing$のなかのすべての X にたいして $x \epsilon X$

という文によって分出されるか。$\varnothing$についての問に対する常として，答はそれに対応する否定形の質問についての方がわかりやすい[5]。つまり，どんな x がここに述べられた条件を充足しないか。$\varnothing$のなかのすべての X にたいして $x \epsilon X$ ということが真でないならば，$\varnothing$のなかに $x \epsilon' X$ のような X が存在しなくてはならない。しかしながら，$\varnothing$のなかにはどのような X も存在しないのであるから，それは不合理である。そこで結論は，どのような x も述べられた条件を充足しえないものではない，あるいは同値なのであるが，すべての x はそれを充足する。言い換えれば，この条件の分出する x は（非存在である）宇宙を総なめにするわけである[6]。ここには深遠な問題なんか何もない。どこかでどのようにか構成すれば空であるとわかってくるような集合がありはすまいかという理由だけで，いつも資格制限や例外を設けていなくてはならないというのはやむをえない迷惑にすぎないのである。それはどうしようもない。ただ人生の事実というばかりである。

もし，われわれが一時的に同意したように，特定の集合 E の部分集合だけに注意を限定すれば，前段に述べた不愉快さはけし飛んでしまうようにみえる。要点は，その場合には（E の部分集合の）集まり $\mathcal{C}$ の共通部分は

$$\{x \epsilon E : \mathcal{C} \text{ 内のすべての } X \text{ にたいして } x \epsilon X\}$$

という集合であると定義できることである。これは何も革命的なことではない。空でない集まりのそれぞれにたいしては，この新しい定義は前のものと一致する。違うところは前の定義と新らしいのとが空な集まりを扱う扱いかたにある。つまり新らしい定義によれば $\bigcap_{X \epsilon \phi} X$ は E に等しいのである（E のどのような要素 x にたいして，$\varnothing$のなかのすべての X にたいして $x \epsilon X$，ということが偽になりうるであろうか）。違いは言語の問題だ

けである。すこし反省してみれば，Eの部分集合の集まり$\mathcal{C}$の共通部分のために提案された「新」定義は，実は，集まり$\mathcal{C}\cup\{E\}$の共通部分についての前からの定義と同じものであって，後の方〔$\mathcal{C}\cup\{E\}$〕は決して空にならない，ということは明らかである[7]。

われわれは集合Eの部分集合を考えてきた。これらの部分集合自身は集合をなすであろうか。つぎの原理はそれにたいして肯定の答を保証するものである。

ベキ集合の公理 (axiom of powers)　それぞれの集合にたいし，集合の集まりであってその要素のなかに所与の集合のすべての部分集合を含むようなものが存在する。

言い換えれば，Eが集合のとき，$X\subset E$ ならば $X\epsilon\mathcal{P}$ であるような集合（集まり）$\mathcal{P}$が存在するのである。

その集合$\mathcal{P}$は必要以上に大きいかもしれない。つまりEの部分集合以外の要素を含んでいるかもしれない。それは容易に矯正できるので，集合$\{X\epsilon\mathcal{P}:X\subset E\}$をつくるように分出公理を適用するだけでよい。（「$X\subset E$」は「すべての$x$にたいして（$x\epsilon X$ ならば $x\epsilon E$)」と同じことを言っているのを思い起してほしい。）すべてのXにたいして，Xがこの集合に属する必要十分条件はXがEの部分集合であることであるから，記法を変えてもう一度この集合を呼び出してみれば，

$$\mathcal{P}=\{X:X\subset E\}$$

になるといえる。この集合$\mathcal{P}$はEのベキ集合 (power set) とよばれ，外延性公理がその一意性を保証する。$\mathcal{P}$がEによってきまることはただ$\mathcal{P}$とする代わりに$\mathcal{P}(E)$と書いて示される。

集合$\mathcal{P}(E)$はEに比較して大へん大きいので例を出すのは容易なことではない。$E=\varnothing$ならば事情はまったく明瞭である。集合$\mathcal{P}(E)$は単一集合

$\{\varnothing\}$ である。単一集合と対のベキ集合も容易に記述できるので，

$$\mathcal{P}(\{a\})=\{\varnothing,\ \{a\}\}$$

および

$$\mathcal{P}(\{a,b\})=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

というようにして得られる。3個組のベキ集合には8つの要素がある。読者はおそらくこれらの言明をみな含んだ一般化を推測することができる（したがって証明してみろという挑発をうけている）ことであろう。その一般化というのは，たとえば n 個の要素をもつ有限集合のベキ集合は 2^n 個の要素をもつ，というのである[8]。（もちろん「有限」のとか「2^n」といったような概念はわれわれに対してまだ公式の身分をもってはいないが，非公式な理解を妨げることもなかろう。）n が（2の n 乗ベキというように）ベキ指数として現われることは，ベキ集合がどうしてその名を担わされているかの理由と関係するところである。

$\mathcal{C}$ が E の部分集合の集まり（すなわち $\mathcal{C}$ は $\mathcal{P}(E)$ の部分的集まり）であるとすれば

$$\mathcal{D}=\{X\epsilon\,\mathcal{P}(E):X'\epsilon\,\mathcal{C}\}$$

と書く[9]。（$\mathcal{D}$ の定義に使用される条件が厳密に術語としての意味で文であることを確かめるためには，つぎのような形にでも書き替えなくてはならない，

［$Y\epsilon\,\mathcal{C}$ でかつ，すべての x にたいし（($x\epsilon E$ かつ $x\epsilon' Y$）ならば，かつそのときにかぎり $x\epsilon X$)］といえるような Y が存在する。

同様な註釈が，われわれが論理および集合論の基本無定義用語ばかりを使うかわりに定義された縮約語を使おうとする場合には，よく適用される。その際翻訳はほとんど何の技巧も要しないし，われわれは通例はそれを省略することにする。）集まり $\mathcal{D}$ の合併集合と共通部分を示すには

$$\bigcup_{X\epsilon\mathcal{C}}X' \quad \text{および} \quad \bigcap_{X\epsilon\mathcal{C}}X'$$

という記号によるのが慣例である。この記号法では，ド・モーガンの法則の一般形はつぎのようになる。

$$(\bigcup_{X\in\mathcal{C}}X)'=\bigcap_{X\in\mathcal{C}}X'$$

および

$$(\bigcap_{X\in\mathcal{C}}X)'=\bigcup_{X\in\mathcal{C}}X'。$$

これらの等式の証明は適切な定義から直接に帰結する。

〈練習問題〉　$\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)=\mathcal{P}(E\cap F)$ および $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)\subset\mathcal{P}(E\cup F)$ を証明せよ。これらの言明はつぎのように一般化できる。

$$\bigcap_{X\in\mathcal{C}}\mathcal{P}(X)=\mathcal{P}(\bigcap_{X\in\mathcal{C}}X)$$

および

$$\bigcup_{X\in\mathcal{C}}\mathcal{P}(X)\subset\mathcal{P}(\bigcup_{X\in\mathcal{C}}X)。$$

これらの一般化について，ここに表現した記号法の妥当な（reasonable）解釈を見出し[10]，それからこれらの式を証明せよ。なおその上の初等的な事実は，

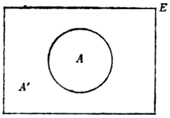
$$\bigcap_{X\in\mathcal{P}(E)}X=\varnothing$$

および

もし $E\subset F$ ならば $\mathcal{P}(E)\subset(\mathcal{P}F)$

である。奇妙な問が $\mathcal{P}$ と $\bigcup$ という演算子の交換に関して出てくる。E は $\bigcup_{X\in\mathcal{P}(E)}X$ につねに等しい（すなわち $E=\bigcup\mathcal{P}(E)$）が，$\mathcal{P}$ と $\bigcup$ を別の順序で適用した結果[11] は E を部分集合，典型的には真部分集合，として包含する集合になる，このことを示せ。

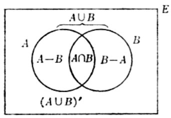
註



1. 公理的集合論以前の素朴集合論では，このような E を「全集合」(universal set *or* universe) などと言って，ヴェン図 (Venn diagram) 等を利用して視覚化するこ

とをはかったのであるが，言うまでもなく，それはパラドクスを招く「宇宙」ととり違えられる危険をはらんでいる。

なお，ヴェン図などによる視覚化については，C. I. ルイスが工夫したように (Lewis, [1], p. 54)，楕円を使って4つの集合の集まりくらいまではうまくこなせるが，それ以上は到底だめ。三段論法を分析する補助手段程度には使えるが，集合論の展開には役立たない。むしろ不要なイメージが理解を妨げる場合が多いようである。



NB 系の集合論では全集合にあたる類が認められるので，それにこのEのはたらきをさせることができるが，**ZF** 系では仮にしか絶対補集合は作れない。

2. $E-A=A'$ つまり‘E’を考えたときの補集合のことである。

3. 本節の終りの方37頁に示される。

4. 双対の原理というのは，おそらく射影幾何学での「2直線が1点で交わる」と「2点が1直線で結ばれる」の互換性などが最初に発見された例であろうと思われるが，集合論の‘∩’と‘∪’の他にも，順序関係での‘≧’と‘≦’や，命題論理の「かつ」と「または」，磁気の「北極」と「南極」など各方面に見られる双対性について類似の原理が立てられている。

なおつぎの練習問題の最後の2つは互いに双対になっていることを確かめれば，一方を証明しただけで他は双対原理により成立すると言える。

5. 第3節（17頁）の「空虚な意味でなりたつ条件」についての言及を参照のこと。

6. つまり空集合については（その要素集合の）共通部分は定義されない。強いて考えればそれは「宇宙」となって，パラドクスを招くからである。

7. 共通部分がEになる可能性をふくめるために $\mathfrak{C}\cup\{E\}$ で定義するのである。そして $\{E\}$ はEの単集合で，Eが必らず要素であるから，$\mathfrak{C}\cup\{E\}$ は空ではなく，前の定義がはたらく。なおここでいう前の定義は **ZF** のもの，新定義は **NB** のものと考えてよい。

8. n個の（相異なる）ものから，それぞれ0個，1個，2個，……，n個ずつとったすべての組合せの数の和を出せばよい。二項定理を使って，

$${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots\cdots+{}_nC_n=(1+1)^n=2^n。$$

9. $\mathfrak{D}$は日常語で言えば「Eの部分集合でその補集合が$\mathcal{C}$の要素になるもの（だけ）の集まり」というようになる。ド・モーガンの法則の一般化を書き表わすために導入された集合である。

10. たとえば

$\bigcap_{X\in\mathcal{C}}\mathcal{P}(X)=\{x:\mathcal{C}$ 内のすべてのXにたいして $x\in\mathcal{P}(X)\}$

すなわち，「$\mathcal{C}$のすべての要素のベキ集合の共通部分」というような解釈を与えるのである。

11. $\mathcal{P}(\bigcup E)$ のこと。

第6節　順　序　対

集合Aの要素を何かの順序に配列するというのはどういう意味であるか。たとえば集合Aは互いに異なる要素の4個組 $\{a,b,c,d\}$ とし，われわれがその要素を

$$c\ b\ d\ a$$

の順に考えていきたいと思っているとしよう。そのことの意味するところについて厳密な定義はなくても，われわれはそれについて集合論で理解できることをやっていくことはできる。すなわち，われわれはその順序づけの個々それぞれの時点で，その時点またはそれ以前の時点に現われた全要素の集合，を考えてみることはできるのである。このようにしてわれわれは集合

$$\{c\}\quad\{c,b\}\quad\{c,b,d\}\quad\{c,b,d,a\}$$

を得る。それからわれわれは，正確にそれらの集合のみを要素とする集合（またはもっと聞えがよいというのであれば，集まり）

$$\mathfrak{C}=\{\{a,b,c,d\},\ \{b,c\},\ \{b,c,d\},\ \{c\}\}$$

を考える，というように進むことはできるわけである。直観を基礎としまたおそらくは明晰になっていない順序の概念によっても，確固として単純なもの，すなわち平明で粉飾のない集合$\mathfrak{C}$をつくりだすのに成功したということを強調するため，上記では$\mathfrak{C}$の要素や，その要素の要素をかきまぜて提示してある。（辞書式のならべ方をしたがる読者ならばそのかきまぜ方の方法がわかるであろう。）

なおしばらくわれわれは順序の意味を知らないふりをし続けよう。前段をざっと見渡してわれわれがつかんだものは集合$\mathfrak{C}$だけであるとして，$\mathfrak{C}$を生じさせた順序をもう一度とらえなおすのにそれが使えるであろうか。答が肯定であることは容易にわかる。$\mathfrak{C}$の要素（もちろんそれら自身も集合である）をしらべて他のすべての要素にも包含されているものを見出す。$\{c\}$ がその要求を満足させ（他には満足させるものがない）から，c が最初の要素であったに違いないことがわかる。つぎには$\mathfrak{C}$の 2 番目に小さな要素を探す，すなわち $\{c\}$ を取り除いた後に残るものすべてに包含されるものを探すのである。$\{b,c\}$ がその要求を満足させ（他には満足させるものがない）から，b が第 2 の要素であったに違いないことがわかる。このように進めば（もう 2 段階が必要なだけであるが）われわれは集合$\mathfrak{C}$から与えられた集合Aの与えられた順序づけへと推移できるのである。

ここで準則とすべきはつぎのことである。すなわち，われわれは集合Aの要素に順序づけをするとはどういう意味かということを厳密に知らなくてもよいのであって，それでもそれぞれの順序を A の部分集合の集合$\mathfrak{C}$と結びつけて，与えられた順序が$\mathfrak{C}$から一意的にとらえなおせるようにすることはできる，ということである。（ここで自明とはかぎらぬ練習問題が出てくる。それはAにおける何らかの順序に対応するようなAの部分集合の集合を内面的に特性づける仕方を見出せ，というのである。われわれにとってはまだ「順序」という語は公式の意味をもっていないのであるから，この問題全体も公式には無意味である。以後の叙述もまったくこの問題の解に依存するところはない。しかしながら読者はその解を見出そうとすることで何なりと価値あるものを習得されるであろう。）Aにおける 1 つの順序から集合$\mathfrak{C}$への移行とその逆行とを上記では 4 個組について例示した。対についてなら万事すくなくとも倍は単純になる。$A=\{a,b\}$ でかつ求める順序では a が最初にくるものとすれば，$\mathfrak{C}=\{\{a\},\{a,b\}\}$ である。

しかしながら b が最初にくるのであれば $\mathcal{C}=\{\{b\},\{a,b\}\}$ である。

第１座標 (first coordinate) を a，第２座標を b とする a と b の順序対 (ordered pair) とは,

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

によって定義される集合 (a,b) のことである。順序対がその名に値するためにもっていなくてはならぬ主要性質をこの定義の結果がもっているということは，定義を立てる動機がどんなに確乎たるものだからといっても，やはり証明しておかなくてはならない。われわれは，(a,b) と (x,y) が順序対であり，かつ $(a,b)=(x,y)$ であるならば，$a=x$ でかつ $b=y$ である，ということを示さなくてはならない。このことを証明するために，まず，a と b がたまたま等しいとすれば順序対 (a,b) は単集合 $\{\{a\}\}$ と同じであることに注意する。逆に，(a,b) が単集合なら $\{a\}=\{a,b\}$ であり，したがって $b\in\{a\}$ で，それゆえ $a=b$ である。いま $(a,b)=(x,y)$ としよう。$a=b$ ならば，(a,b) と (x,y) はともに単集合で，したがって $x=y$ である。$\{x\}\in(a,b)$ かつ $\{a\}\in(x,y)$ であるから，a,b,x,y はみな等しいという結論がでてくる。もし $a\neq b$ ならば，(a,b) および (x,y) はともにただ１個の単集合，すなわち $\{a\}$ と $\{x\}$ をそれぞれ含んでいる。したがって $a=x$ である。この場合，(a,b) と (x,y) はともに単集合でない非順序対をただ１つ，すなわち $\{a,b\}$ と $\{x,y\}$ をそれぞれ含んでいるということもまた真であるから，$\{a,b\}=\{x,y\}$ という結論が得られ，そしてそれゆえに個別にいえば $b\in\{x,y\}$ である。b は x ではありえない（というのはそうだとすれば $a=x$ でかつ $b=x$ とせざるをえず，そしてそれゆえ $a=b$ とせざるをえない）から，$b=y$ としなくてはならない。これで証明は完了である。

A と B を集合とすれば，A の要素 a と B の要素 b からなるすべての順序対 (a,b) を含むような１個の集合は存在するか。その答えが肯定であるこ

とはまったく容易にわかる。事実，$a\epsilon A$ でかつ $b\epsilon B$ ならば，$\{a\}\subset A$ でかつ $\{b\}\subset B$。それゆえ $\{a,b\}\subset A\cup B$ である。また $\{a\}\subset A\cup B$ であるから，$\{a\}$, $\{a,b\}$ はともに $\mathcal{P}(A\cup B)$ の要素であるといえる。そのことは $\{\{a\},\{a,b\}\}$ が $\mathcal{P}(A\cup B)$ の部分集合であること，したがって $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ の要素であることを意味する。言い換えれば $a\epsilon A$ でかつ $b\epsilon B$ であればいつでも $(a,b)\epsilon\mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$ である。このことが知られれば，分出公理と外延性公理を適用して，Aの要素 a とBの要素 b による順序対 (a,b) ばかりからなる一意的な集合 $A\times B$ を作り出すのはいつもどおりのことになる[1]。その集合はAとBの<u>デカルト積</u>（Cartesian product)[2] と呼ばれ，つぎのことをその特性とする。

$$A\times B=\{x: A \text{ のある要素 } a \text{ と } B \text{ のある要素 } b \text{ に対して } x=(a,b)\}$$

2つの集合のデカルト積は順序対の集合（すなわち各要素が順序対であるような集合）であり，また同じことがデカルト積のすべての部分集合についても真である。なお，逆方向へ進むこともできるということを知っておくのは技術的に大切なことである。すなわち，順序対からなるすべての集合は2つの集合のデカルト積の部分集合なのである。言い換えれば，集合Rがそのすべての要素が順序対であるような集合ならば，$R\subset A\times B$ であるような2つの集合AとBが存在する。この証明は簡単である。実際 $x\epsilon R$, したがって $x=\{\{a\},\{a,b\}\}$ であるようなaとbがあるとしよう。問題は縛り記号〔$\{\{\},\{\}\}$のこと〕の下からaとbをほじくり出すことである。Rの要素は集合であるから，Rの中の集合の合併集合を作ることはできる。そして，xはRの中の集合の1つであるからxの要素はその合併集合に属する。$\{a,b\}$ はxの要素の1つであるから，前に最単純記法と言っておいたやり方で，$\{a,b\}\epsilon\bigcup R$ と書いてよい。縛り記号のうちの一方の組〔外側の $\{\}$〕は消滅してしまった。他方の組〔内側の $\{a\}$, $\{a,b\}$ の$\{\}$〕も追いやるために，もう一度同じことをやってみよう。$\bigcup R$ の中の集合の合

併集合を作る。$\{a,b\}$ はそれらの集合の1つであるから，$\{a,b\}$ の要素はその合併集合に属するといってよく，したがって a と b はともに $\bigcup\bigcup R$ に属する。これは上記の見込みを満たしている。つまり R をそれを部分集合にもつ $A\times B$ が存在するような集合として提示するには A と B がともに $\bigcup\bigcup R$ であると考えればよいわけである。A と B をできるかぎり小さくとるのが望ましい場合はよくある。そうするには，ただ分出公理を適用して，

$$A=\{a:((a,b)\epsilon R)\quad \text{となる}\ b\ \text{が存在する}\}$$

$$B=\{b:((a,b)\epsilon R)\quad \text{となる}\ a\ \text{が存在する}\}$$

という集合を作ればよい[3]。これらの集合はそれぞれ第1および第2座標上への R の射影 (projection) とよばれる。

現在では集合論がいかに重要であるといっても，それが始まった頃には，学者の中にもやがて数学がなおしてくれるのを期待すべき病気だとみなす者がいたのである。そういうわけで集合論の考察には病理的とよばれるものが多々あった[4]。そしてその言葉は生き続けて数学上の慣用語となり，話者の好まないことを指すのによく使われる。順序対の陽表的な定義($(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$)[5] もよく病理的集合論へと追放されることのあるものである。その〔病理的という〕呼名がこの場合ふさわしいと考えるひとびとにとって有利なことになるが，この定義はここまではその目的に役立ってきたものの，今後は2度と使われることのないものだ，ということに注意しておく。われわれは，順序対は第1および第2座標によって決定され，また逆にそれら〔2つの座標〕を一意的に決定するということと，デカルト積が作れるということ，そして順序対の集合はすべてあるデカルト積の部分集合であるということ，を知る必要はある。しかしどのような特定の進入路がその目標を達成するのに使われるかはどうでもよいことなのである。

前記の順序対の陽表的な定義に対して多くの数学者が感じる不信と疑念

の源泉をつきとめることは容易である。厄介なのは何か間違ったことや遺漏があるからというのではない。われわれが定義した概念の主性質はすべて正しく(つまり直観の要求に合致しており)，また一切の正しい性質は提示されている。厄介なのは，その概念に偶然に入りこんできてひとを惑わすような的はずれの性質があることなのである。$a=x$ でかつ $b=y$ のとき，かつそのときにかぎり $(a,b)=(x,y)$ という定理などはわれわれが順序対に関し学びたい事柄である。ところが他方 $\{a,b\}\epsilon(a,b)$ という事実は偶然に入りこんできたと思える。それはその〔順序対という〕概念の本具的な性質というよりはむしろ飛入りの性質なのである。

わざとらしいという責めがあるのはそのとおりである。しかしそれは概念の経済のために支払って高すぎる値段だというわけでもない。順序対という概念は公理によって過不足なく正しい性質だけを賦与して基本用語に追加導入することもできたであろう。そうしている理論もある。数学者は，すこし多くの公理を憶えなくてはならないことと，すこしばかりの偶有的な事実を忘れなくてはならないこととの間で選択すべきなのであって，その選択が趣味の問題にすぎないことはかなり明白である。同様な選択は数学ではよく出てくるので，たとえば，本書でもさまざまな種類の数の定義に関連してまた直面することになるであろう。

〈練習問題〉 A, B, X, Y が集合ならば，

(i) $(A\cup B)\times X=(A\times X)\cup(B\times X)$

(ii) $(A\cap B)\times(X\cap Y)=(A\times X)\cap(B\times Y)$

(iii) $(A-B)\times X=(A\times X)-(B\times X)$

$A=\varnothing$ かまたは $B=\varnothing$ ならば $A\times B=\varnothing$ で，逆もいえる。$A\subset X$ かつ $B\subset Y$ ならば $A\times B\subset X\times Y$ で，($A\times B\neq\varnothing$ とすれば) 逆もいえる。

註

1. 第3節註4とそれに対応する付近の本文，および第4節註6を参照。

2. これはまた直積 (direct product) とよばれることもある。

3. Aの定義中「((a , b) ϵR) となる b が存在する」では a が，同様に B の定義中では b が，それぞれ自由に現出しており，その a ， b でそれぞれ集合 A ， B が分出されるのに注意。第2節註3（13頁）参照。

4. この病理的という語が数学でよく使われるようになったのは19世紀後半くらいからであろう。もちろん集合論にかぎってのことではないので，たとえばブルバキ『数学原論』の集合論3の巻末にある「歴史覚え書き」（村田全訳）（61頁）には「リーマン自身の積分に関する研究や，さらにはボルツァノ，ヴァイエルシュトラスの作った接線をもたない曲線の例などと共に，ここに，まったく数学の病理学と言いたいようなものが始まった」というような叙述がある。

5. 順序対のこの定義は，関係の理論を集合論に帰着させるためにクラトウスキー (Kuratowski) によって1921年に確立されたものであるが，同じ構想はサイバネティックスで知られるウィーナー (N. Wiener) がラッセルのところへ出した学位論文（1914年）ですでに発表していた。もっともクラトウスキーは1921年にはそのことは知らなかったようである。

第7節　関　　　係

順序対を使えば，集合論の言語で関係の数学理論を形成することができる。関係という語でここでは（男と女の間の）婚姻とか（要素と集合の間の）所属というようなことを意味することにする。もっとはっきり言うために，われわれが関係と称するものは時として2項 (binary) 関係と呼ばれることがある。3項関係の例は人の両親であること（アダムとイブはカインの両親である）である。本書では3項，4項あるいはその上の関係の理論をとり扱う機会はないであろう。

たとえば婚姻というように任意に特定された関係をみれば，ある順序対 (x, y)，すなわち x が男，y が女で，x は y と結婚している，といえるような対だけを考えたくなるであろう。われわれにはまだ関係の一般概念の定義はわからないが，ちょうどこの婚姻の例のように，すべての関係は第1座標が第2座標に対してその関係に立つといえるようなあらゆる順序対の集合を一意的に決定すべきである，ということは是認できるように思われる。もしわれわれが関係を知っているというのであれば，われわれは上記のような集合を知っており，またなおそれ以上に，もしわれわれがそういう集合を知っているというなら，〔順序対のできる〕関係を知っているのである。たとえば，婚姻に対応するような人の順序対の集合が提示されているとすれば，たとえ婚姻の定義は忘れていても，どういう場合に x なる男が y なる女と婚姻を結んでいて，どういう場合はそうでないか，を見分けることはつねにできるであろう。それには順序対 (x, y) がその集合に

属するか否かを見るだけでよかろうからである。

われわれは関係が何であるかは知らなくてもよい。しかしわれわれは集合とは何であるかを知っており，かつまた前段までに考えたところで関係と集合との間に密接な結びつきがあることは確実になっている。関係についての厳密に集合論的な取扱いもその発想からきた結びつきを活用しようとするもので，まず最も単純な仕事は関係をそれに対応する集合であると定義することである。それこそわれわれの仕事であって，そこでわれわれは関係とは順序対の集合であると定義するのである。はっきり言い換えれば，Rのおのおのの要素が順序対であるならば集合Rは関係である。もちろんそれは，$z\epsilon R$ ならば $z=(x, y)$ であるようなxとyが存在する，という意味である。Rが関係であるとき，$(x, y)\epsilon R$ という事実は時に

$$xRy$$

と書いて，日常言語で言うように，xはyに対してR関係に立つと言って表現するのが便利なことがある。

最も刺激のない関係とは空な関係である。（$\varnothing$が順序対の集合であることを証明するには，$\varnothing$の要素で順序対でないものを探してみること。）もう１つの面白味の少ない例は任意の２集合XとYのデカルト積である。ただここにはもうすこしばかり興味のある例をあげる。Xを任意の集合とし，Rを $X\times X$ に含まれる $x=y$ であるような対 (x, y) すべてからなる集合としてみる。関係RはまさしくXの要素間の相等 (equality) という関係に他ならない。もう一例をあげておくだけで十分であろう。それはこうである。Xを任意の集合，Rを$X\times\mathcal{P}(X)$に含まれる $x\epsilon A$ であるような対(x, A)のすべてからなる集合としてみる。この関係RはまさしくXの要素とXの部分集合との間の所属という関係に他ならない。もし $x\epsilon X$ でかつ $A\epsilon\mathcal{P}(X)$ ならば，xRA は $x\epsilon A$ と同じ意味である。

前節でわれわれは順序対の集合Rのすべてに関連してRの第１および第

2座標上への射影とよばれる2つの集合があることを見ておいた。関係の理論ではこれらの集合はRの定義域 (domain) および関係域 (range)[1] （略して dom$R$ および ran$R$）として知られている。それらは，

$$\mathrm{dom}R=\{x:(xRy)\ \text{となる}\ y\ \text{がある}\}$$

および

$$\mathrm{ran}R=\{y:(xRy)\ \text{となる}\ x\ \text{がある}\}$$

というように定義されることを思い起こしておこう[2]。もしRが婚姻という関係ならば，したがってxは男yは女でxとyが互に婚姻を結んでいるならば dom$R$ は結婚している男の集合で ran$R$ は結婚している女の集合である。$\varnothing$については定義域も関係域も$\varnothing$に等しい。Rが $X\times Y$ ならば，dom$R=X$ で ran$R=Y$ である。RがXにおける相等関係ならば dom$R=$ ran$R=X$ である。RがXと$\mathcal{P}(X)$の間の所属関係ならば，dom$R=X$ で ran$R=\mathcal{P}(X)-\{\varnothing\}$ である。

もしRがデカルト積 $X\times Y$ に包含される関係（したがって dom$R\subset X$ で ran$R\subset Y$）ならば，RはXからYへの関係であるというのが便利なこともある。そしてXからXへの関係と言う代わりにXにおける関係というように言ってもよい。Xにおける関係Rは，Xに含まれるすべてのxに対して xRx ならば，反射的 (reflexive) であり；xRy なら yRx といえるならば，対称的 (symmetric)；そして xRy かつ yRz なら xRz といえるならば，推移的 (transitive) である。（練習問題：考えうるこれら3つの性質のそれぞれに対して，その性質はもたないが他の2つはもっている，というような関係を見出せ。）1つの集合における関係は，反射的，対称的でかつ推移的ならば，同値関係 (equivalence relation) である。集合Xにおける最小の同値関係〔いかなる同値関係にも包含される同値関係〕はXにおける相等関係であり，Xにおける最大の同値関係〔いかなる同値関係をも包含する同値関係〕は $X\times X$ である。

1つの集合Xにおける諸同値関係と Xの部分集合のある集まり（分割（partition）とよばれる集まり）との間には緊密な結び付きがある。Xの分割というのはXの空でない部分集合の互いに素な集まり[3]で合併集合がXになるもの$\mathcal{C}$のことである。RがXにおける同値関係であり，かつ，xがXに含まれているとき，Rに関するxの同値類（equivalence class）とはXの要素yで xRy のなりたつものすべてからなる集合のことである。（伝統の重みからここでは「類」(class) という語を避けることができなくなっている。）例：RがXにおける相等〔関係〕ならばおのおのの同値類は単集合であり；$R=X\times X$ならば集合X自身が唯一の同値類である[4]。Rに関するxの同値類に対しては標準記法というものはない。われわれはふつうは x/R で示し，すべての同値類の集合に対しては X/R と書くことにしよう。(X/R は「Rを法としたときのX〔の同値類〕(X modulo R) とか，より簡略には「法RのX」(X mod R) と読めばよい。練習問題：X/R がほんとうに集合であることを，ベキ集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 X/R を正確に〔過不足なく〕分出する条件を表明することによって示せ。）さて，いったんRのことは忘れて，あらためてXの分割$\mathcal{C}$について論じ始めよう。xとyが集まり$\mathcal{C}$のうちの同一集合に属する場合にかぎり

$$x\, X/\mathcal{C}\, y$$

と書くことで，$X/\mathcal{C}$ と呼ぼうとする1つの関係が，Xにおいて定義される。われわれは $X/\mathcal{C}$ を分割$\mathcal{C}$によって誘導される（induced）関係と呼ぼう。

上段でわれわれは，どのようにしてXにおけるすべての同値類のそれぞれにXの1つの部分集合の集合を結合させるか，そしてまたどのようにしてXのすべての分割のそれぞれにXにおける1つの関係を結合させるかを見た。同値関係と分割との連関は，$\mathcal{C}$から$X/\mathcal{C}$ への移行は R から X/R への移行のちょうど逆である，と言って記述することができる。もっと陽表的にいえばつぎのようになる。RがXにおける1つの同値関係ならばそ

の同値類の集合はその関係Rを誘導するXの分割であり，かつまた，$\mathfrak{C}$がXの１つの分割ならばそれによって誘導される関係はその同値類の集合がちょうど〔過不足なく〕$\mathfrak{C}$になるような同値関係である[5]。

そのことを証明するために同値関係Rから出発しよう。おのおののxはどれかの同値類に属する（たとえば $x\epsilon x/R$）から，それら同値類の合併集合がすべてのXになることは明らかである。もし $z\epsilon(x/R\cap y/R)$ ならば，xRz かつ zRy で，それゆえ xRy である。このことは２つの同値類が１つの要素を共有すればそれらは同一であること，または言い換えれば，２つの判別な同値類はつねに互いに素である，ということを含意する。同値類の集合はそれゆえ分割である。２つの要素がこの分割のうちの同一の集合（同値類）に属すると言うことは，定義によって，それらが互いにR関係に立つことを意味する。これで先の言明の前半が証明されている。

後半の方はもっと易しい。分割$\mathfrak{C}$から出発して誘導される関係を考察すればよい。Xのすべての要素は$\mathfrak{C}$のどれかの集合に属するから，反射性とはxとxが$\mathfrak{C}$のうちの同一の集合に属することを言うだけである。対称性は，xとyが$\mathfrak{C}$のうちの同一の集合に属すればyとxも$\mathfrak{C}$のうちの同一の集合に属する，ということを言うもので，それは明らかに真である。推移性は，xとyが$\mathfrak{C}$のうちの同一の集合に属しyとzも$\mathfrak{C}$のうちの同一の集合に属すれば，xとzも$\mathfrak{C}$のうちの同一の集合に属する，ということを言うもので，これまた明らかである。Xに属するおのおののxの同値類とは$\mathfrak{C}$のうちの集合でxがそれに属するものに他ならない。これで見こんだことすべての証明は完了である。

註

1. ここに関係域と訳した 'range' は次節以後関数については「値域」と訳し直される。なお，range は逆領域 (counterdomain *or* converse domain) と呼ば

れることもある。

2. 前節44頁の射影の定義参照。

3. 第 4 節28頁に定義がある。

4. $x \in X$であるどのようなxをとっても，その同値類は同じくXである。

5. このことから，反射，対称，推移の各性質をみたす関係つまり同値関係は分割原理あるいは分類原理とも呼ばれる。

第8節　関　　数

XとYが集合であるとき，XからYへの(あるいは，X上でYの中への)関数 (function) とはつぎのような関係fのことである。すなわち，dom f $=X$ であり，X内のそれぞれのxに対して $(x,y)\in f$ となるただ1つの要素yがY内にあるような関係fである[1]。この一意性の条件はつぎのようにして陽表的に定式化できる。つまり，$(x,y)\in f$ でかつ $(x,z)\in f$ ならば $y=z$ である。X内のそれぞれのxに対して，$(x,y)\in f$ であるようなY内のただ1つのyは $f(x)$ で示される。関数に対してはこの記号法およびそれにわずかの変化を加えたものが，もっと一般的な関係に対して用いられる他の記号法を凌駕している。そこで今後fが関数ならば，われわれも $(x,y)\in f$ や xfy の代りに $f(x)=y$ と書くことにする。要素yは引き数〔自変数〕(argument) xにおいて関数fがとる (assume *or* take on) 値 (value) と呼ばれる。同値な表現で，fはxをyの上へと送る (send) とか写像する (map) とか変換する (transform) というように言ってもよい。関数に対して同義語として使われることのある多くの語のうちに写像 (map *or* mapping) とか変換 (transformation) とか対応 (correspondence) とか演算子〔作用素〕(operator) などがある。

$$f: X \longrightarrow Y$$

という記号が「fはXからYへの関数である」の縮約形として使われることもある。XからYへの あらゆる関数の集合はベキ集合 $\mathcal{P}(X\times Y)$ の部分集合で，それは Y^X で示される[2]。

上に列挙した同義語の中には，そのような定義によれば関数が単に何かである (is) という以上に何をなす (do) こともないのに不満だ，という学者が出てきそうなものもある。この不満はその語彙がさまざまに使われることのうちに反映している。つまり関数という語は何ほどかでも活動的な未定義の対象のためにとりのけられており，それでわれわれが関数と呼んだ順序対の集合は関数のグラフ (graph) と呼ばれるといった具合である。数学でも日常生活でも，その語を厳密に集合論上の意味にとった場合の関数の例をみつけることはた易い。われわれが探さなくてはならないのは，数に表わされたものには限らず，一覧表形式になった情報ならばそれでよいのである。一例で言えば１つの市の人名録であって，この場合その関数の引き数はその市の住民であり，そしてその値はかれらの住所である。

関係一般に対して，だから以後でいえば特に関数に対して，われわれはその定義域 (domain) と値域（関係域，range）という概念を定義しておいた[3]。 XからYの中への関数fの定義域は， 定義によってXに等しいが，その値域はYに等しいとは限らない。値域は $f(x)=y$ となるようなxがX内に存在するようなYの要素yからなるのである。fの値域がYに等しければ， fはXをYの上へと (onto) 写像すると言う。 もしAがXの部分集合ならば，$f(x)=y$ となるxがその部分集合A内に存在するようなYの要素yのすべてからなる集合を考えてみたくなる。このようなYの部分集合はfの下でのAの像 (image) と呼ばれ，$f(A)$ で示されることが多い。この記法は悪いものであるが破滅的というほどではない。その悪いところというのは，もしたまたまAがXの要素であり，かつまたXの部分集合でもあれば(あまりありそうにない状況であるが，不可能には程遠い)，$f(A)$という記号があいまいになることである。それはAにおけるfの値を意味するのか，Aの要素におけるfの値の集合を意味するのかわからない[4]。しかし標準的な数学上の慣習にしたがって，われわれも文脈に頼りながらこ

の悪い記法を使用することにし，まれにであるが混乱を避ける必要があるときには，ことば書きで約定をつけ加えることにしよう。X自身の像はfの値域であり，そしてfの「……の上への」という性格は $f(X)=Y$ と書いて表わし得ることに注意してほしい。

Xが集合Yの部分集合ならば，X内の各xに対して $f(x)=x$ によって定義される関数fはXのYの中への包含写像 (inclusion map)（あるいは埋め込み (embedding) または単射 (injection)）とよばれる。「……によって定義される関数f」という述べ方はこうした文脈ではごく普通のものである。それは，もちろん，言明された条件をみたすただ1つの関数が実際に存在するということを意味するつもりのものである。手近な特例でみればそのことは十分明白であって，われわれは $X\times Y$ の中で $x=y$ のいえるあらゆる順序対 (x, y) の集合を考えてみるように誘導されているのである。同様な考慮はすべての場合にあてはまる。そして，数学の標準的なやり口に従って，われわれは通例は関数をおのおのの引き数〔自変数〕xでのその値yを記述することによって記述していく。そうした記述はそこに入ってくる（順序対の）集合の直接的な記述よりも長くて厄介になることもある[5]。だがそれにもかかわらずたいていの数学者は 引き数–関数値 という記述が他のどんなものよりも明瞭だとみなしている。

XのXの中への包含写像はX上の恒等写像 (identity map) とよばれる。（関係についての言語でいえば，X上の恒等写像はXにおける相等(equality)の関係[6] と同じである。）まえと同様に $X\subset Y$ ならば，XのYの中への包含写像とY上の恒等写像との間には関連があり，その関連は大きなものから小さな関数をつくる一般的な手続きの特例である。たとえば，fがYからZへの関数であり，かつXがYの部分集合ならば，XからZへの関数gを自然に構成する仕方があるわけで，$g(x)$ をX内のおのおののxに対して$f(x)$ に等しいとすればよい[7]。関数gはfのXへの制限 (restriction) と，

そしてfはgのYへの拡張 (extension) とよばれ $g=f\mid X$ と書く慣わしである。制限の定義は，X内のおのおののxに対して $(f\mid X)(x)=f(x)$ と書いて表わすことができる。また $\mathrm{ran}(f\mid X)=f(X)$ であることもみておくとよい。Yの部分集合の包含写像はY上の恒等写像のその部分集合への制限である。

関数の単純だが有用な例がある。2つの任意の集合XとYを考え，そして $X\times Y$ からXの上への関数fを $f(x,y)=x$ と書いて定義してみる[8]。（ことばづかいにこるひとなら，$f(x,y)$ の代りに $f((x,y))$ と書くべきだったのではないかと注意するであろう。もっともまだ誰も実際に注意したものはないが。）この関数fは $X\times Y$ からXの上への射影 (projection) とよばれ，同様に $g(x,y)=y$ ならばgは $X\times Y$ からYの上への射影である。用語法はここで以前のもの[9]と食い違っているが，ひどすぎるわけでもない。もし $R=X\times Y$ ならば，以前に第1座標の上へのRの射影とよばれたものは，いまのことばでは，射影fの値域になっている。

もっと複雑でそれだけにもっと貴重な関数の例はつぎのようにして得られる。RをXでの同値関係としてみる。そしてfを$f(x)=x/R$ で定義されるXから X/R の上への関数とするのである[10]。この関数fはXから X/R への標準写像 (canonical map) とよばれることがある。

もしfがXからYの上への任意の関数ならば，X内の同値関係Rを定義する自然な方法がある。$f(a)=f(b)$ ならば aRb と書けばよい（ここにaとbはXに含まれる)。Yの各要素yに対して，$g(y)$ を $f(x)=y$ であるようなX内の要素xのすべてからなる集合とする[11]。Rの定義から，おのおののyに対して $g(y)$ は関係Rの同値類であること，言いかえれば，gはYからRの全同値類の集合 X/R の上への関数であること，が導ける。関数gはつぎのような特別な性質をもっている。つまり，uとvが相異なる要素ならば，$g(u)$ と $g(v)$ は X/R の相異なる要素である。つねに

相異なる要素を相異なる要素の上へ写像する関数は1対1 (one-to-one)（ふつうは1対1対応 (one-to-one correspondence)）と呼ばれる。上記の例のうちでは包含写像が1対1であるが，自明な特別の場合を除いて，射影は1対1ではない。（練習問題：特別とはどんな場合があるか。）

関数の初等理論のつぎの局面へ入っていくために，ちょっとわき道へそれて自然数の最終的な定義を見越したうえで，そのひとかけらを使わなくてはならない。全自然数を定義することがいま必要になるわけではない。最初の3つがいるだけである。いまは発想順の長々しい前おきを述べているにふさわしい場合ではないので，一時的に驚き苦労する読者が出てくるという危険を冒しても，まっすぐ定義へと進んでみよう，定義とはこうである。つまりわれわれは，

$$0=\varnothing,\quad 1=\{\varnothing\}\ \text{そして}\ 2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$$

と書いて0，1および2を定義する。言い換えれば，0は空集合，1は単集合 $\{0\}$，そして2は対 $\{0,1\}$ なのである。この気狂い沙汰のように見える定義にもついていく道 (method) はあることを見落さないでほしい。つまり，集合0，1または2の中にある要素の（ふつうの日常的な語の意味での）数は，それぞれ零個，一個または二個となっているわけである。

Aが集合Xの部分集合であるとき，Aの特性関数 (characteristic function) とは，Xから2への関数χのことで，$x\in A$ であるかまたは $x\in X-A$ であるかにしたがって $\chi(x)=1$ または0である。Aの特性関数が集合Aにかかわるものであることはχと書くかわりに χ_A と書いて示せばよい。Xのおのおのの部分集合A（すなわち $\mathcal{P}(X)$ のおのおのの要素）にAの特性関数（すなわち 2^X の1つの要素）を割りつける関数は，$\mathcal{P}(X)$ と2^Xとの間の1対1対応である[12]。（補足的に言うと，「$\mathcal{P}(X)$ 内のおのおののAに 2^X 内の要素 χ_A を割りつける関数」という句の代りに「関数$A\to$

χ_A」という縮約を使用するのが慣習になっている。このことばでは，例えば，$X \times Y$ からXの上への射影は関数 $(x, y) \longrightarrow x$ と呼んでよいし，関係Rをもつ集合Xから X/R の上への標準写像は関数 $x \to x/R$ と呼んでよい。)

〈練習問題〉 (i) Y^{ϕ} はYが空であろうとなかろうとちょうど1つの要素，すなわち$\varnothing$をもつ。また(ii) X が空でないなら，$\varnothing^X$ は空である。

註

1. xに対してyがただ1つ対応するというのは，$x_1 \neq x_2$ として，$(x_1, y) \epsilon f$ でかつ $(x_2, y) \epsilon f$ となることはありうることを意味している。そこで関数は一般には「多対1関係」(many-one relation) であると言われている。特に「1対1」の場合については本節後半で述べられる。

2. この集合は配置集合 (Belegungsmenge ; distribution set) と呼ばれることがある。なお，この記法を了解する助けには，XとYがともに有限集合でそれぞれm個，n個の要素をもつ場合を考えることが役に立つであろう。つまり，X内のm個の（相異なる）もの（要素）をY内のn個のものに分配（配置）する仕方は n^m 通りあるから，これがXからYへの関数の総数に等しい。だからこの場合 Y^X の含む要素の個数は n^m 個であり，そのことがこの記号の選ばれる背景に想定されるのである。なお第13節91頁にこの事実は出てくる。

3. 第6節49頁参照。

4. この悪いと言われる点を避けて，Aの要素xに対応する $f(x)$ の値の集合をさすのにホワイトヘッドとラッセルに従って $f``A$ という記号を使っている書物もある（これはまた関数に限らず関係一般に対して「集合$A$の関係$R$の下での像」を示すのに $R``A$ というように使われる)。

   なお「あまりありそうにない状況であるが，不可能には程遠い」とことわってある状況としては，たとえば $X=\{a, \{a\}\}$，$A=\{a\}$ というようにしてみればよいであろう。明らかに$A \epsilon X$ で，一方 $\mathcal{P}(X)=\{\phi, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$ であるから $\{a\} \epsilon \mathcal{P}(X)$ つまり$A \subset X$ でもあるわけである。

5. たとえば Suppes, [1], p. 87 に使われた例をこのことにあてはめてみると，

$f=\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (3,\ 4)\}$

を $f(x)=y$ 式に書くには，

$f(1)=\phi,\ f(2)=\phi,\ f(3)=4$

と書かなくてはならないことになる。($f(1)=\phi$ となるのは $f(x)=y$ での y の一意性による。)

6. 第7節48頁参照。

7. 直観的にわかりやすく，日常語で言いかえれば，「$g(x)$ は，Y の要素のうち，Y の部分集合 X に属するものだけの f による Z 内の像で，したがって $g(x)$ は $f(x)$ の部分集合になっている」というように言えるであろう。

8. $z=k(x,y)$ を考えて，この z の値をその値を与える x の値に対応させるのが f だという場合で見れば初等的にわかりやすいであろう。

9. 第6節44頁参照。

10. x/R, X/R などの記号とその意味については第7節50頁の同値類に関するところを見ること。

11. 本節の註1にも明記したように，$f(x)=y$ となる x の値は1つとはかぎらないことに注意すべきである。

12. 有限集合の場合の事情を考えてみるのがこの場合にも初等的な理解に役立つであろう。いま X が n 個の要素をもつとしてみると，第5節36頁にあったように，X のベキ集合 $\mathcal{P}(X)$ の要素の個数は 2^n 個である。一方本節註2に書いたところからして，配置集合 2^X の要素の個数も 2^n 個である。これで本文に言う1対1対応があることの側面理解が得られるであろう。

無限集合の場合にも言えることは後に，おそらく本書を一通り読み終えてから，もう一度検討するのがよいと思う。

第9節　族

ある関数の値域がその関数自身より重要に思えるような場合がある。そういう場合が起これば，用語法も記号法もともに根本的な変更を受ける。たとえば，x が集合 I から集合 X への関数であるとしてみよう。（文字の選び方そのものが何か変ったことが起こりつつあるなということを示している。）定義域 I の要素は添数（index）と呼ばれ，I は添数集合（index set），関数の値域は添数をもった集合（indexed set），関数自身は族（family）と呼ばれる[1]。そして関数 x の添数 i での値はその族の項（term）と呼ばれ，x_i で示される。（この用語法は絶対的に確立されたものではないが，関連していながら少しずつ変った用語の中から標準的に選んだものの1組である。以下ではこれが，そしてこれだけが使用される。）この〔族の〕記法を伝達しまたその強調点を指示するのに，受け容れ難いのではあるが一般に受け容れられている方法は，X 内の族 $\{x_i\}$ とか，あるいは X の要素が何であろうとその族 $\{x_i\}$ とかというように語るというやり方である[2]。そして必要とあれば添数集合 I は（$i \in I$）というような括弧に入れた表記で指示しておくのである。そこで，たとえば，「X の部分集合の族 $\{A_i\}$」という句は，ある添数集合 I から $\mathcal{P}(x)$ の中への関数 A を指すものとふつうは了解されているのである。

$\{A_i\}$ が X の部分集合の族ならば，その族の値域の合併集合は，族 $\{A_i\}$ の合併集合あるいは集合 A_i の合併集合と呼ばれ，その標準記法は，添数集合 I を強調することが重要であるか否かにしたがって

$$\bigcup_{i\in I}A_i \text{ または } \bigcup_i A_i$$

である。合併集合の定義からただちに，少なくとも1つの i に対して x が A_i に属するとき[3]，かつそのときにかぎり $x\in\bigcup_i A_i$，ということが出てくる。$I=2$ ならば，したがって族 $\{A_i\}$ の値域が非順序対 $\{A_0, A_1\}$ ならば，$\bigcup_i A_i=A_0\cup A_1$ である。集合の任意の集まりの代りに集合族を考えて少しも一般性は失われないことを見逃さないでほしい[4]。集合の集まりはすべて何らかの族の値域なのである。事実，$\mathfrak{C}$ が集合の集まりであれば，$\mathfrak{C}$ 自身に添数集合の役をさせ，そして族の役には $\mathfrak{C}$ 上の恒等写像をあてていけばよい。

対の合併集合の演算がみたす代数法則は任意の合併集合に一般化することができる。たとえば，$\{I_j\}$ を J という定義域をもつ集合族としてみる。$K=\bigcup_j I_j$ と書き，$\{A_k\}$ を定義域 K の集合族とすれば，

$$\bigcup_{k\in K}A_k=\bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I_j}A_i)$$

を証明することは困難ではないが，これは合併集合に対する結合律の一般化した言い換えである。〈練習問題〉交換律を一般化した言い換えを定式化して証明せよ。

空な合併集合は意味をなす（そして空である），が，空な共通部分は意味をなさない[5]。この自明な点を除いたら，共通部分に対する用語法も記号法もすべての点で合併集合に対するものと並列する。そこで，たとえば，$\{A_i\}$ が空でない集合族ならば，その族の値域の共通部分は族 $\{A_i\}$ の共通部分，または集合 A_i の共通部分と呼ばれ，それに対する標準記法は添数集合 I を強調することが重要であるか否かにしたがって

$$\bigcap_{i\in I}A_i \quad\text{または}\quad \bigcap_i A_i$$

である。(「空でない族」という語は定義域 I が空でない族を意味する。) 共通部分の定義からただちに，$I\neq\varnothing$ ならば x が $\bigcap_i A_i$ に属する必要十分条件は，すべての i に対して x が A_i に属することである，ということが

出てくる。

共通部分に対する一般化された交換律および結合律は合併集合に対するのと同様に定式化し証明することができる。あるいはその代りに，ド・モーガンの法則[6]が合併集合に対する事実からそれら両律を引き出すのに使える，と言ってもよい。これはほとんど明白なことであり，それゆえに大して面白くもない。興味ある代数的恒等式は合併集合と共通部分の双方を含むものである。そこで，たとえば，$\{A_i\}$がXの部分集合の族でまた$B\subset X$ならば，

$$B\cap \bigcup_i A_i=\bigcup_i (B\cap A_i)$$

かつ

$$B\cup \bigcap_i A_i=\bigcap_i (B\cup A_i)$$

であるが，これらは分配律の弱い一般化 (mild generalization) である。

〈練習問題〉 $\{A_i\}$ と $\{B_j\}$ がともに集合族ならば，

$$(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j)=\bigcup_{i,\,j}(A_i\cap B_j)$$

かつ

$$(\bigcap_i A_i)\cup(\bigcap_j B_j)=\bigcap_{i,\,j}(A_i\cup B_j)$$

記号の説明：$\bigcup_{i,\,j}$ というような記号は，$\bigcup_{(i,\,j)\in I\times J}$ の縮約形である。

族の記法は通例デカルト積の概念の一般化に際して使用されるものである。2つの集合XとYのデカルト積はX内のxとY内のyでつくる順序対(x,y) 全体の集合として定義された。この集合とある族の集合との間に自然な1対1対応があるのである。事実，$a\neq b$ である任意の一個の非順序対$\{a,b\}$ を考え，また $\{a,b\}$ によって $z_a\in X$, $z_b\in Y$ というように添数をつけた族zのすべてからなる集合Zを考えよう。Zから $X\times Y$ への関数を$f(z)=(z_a,z_b)$ で定義すれば，そのfが見込みをつけておいた1対1対応である。Zと $X\times Y$ との違いはただ単に記号法上のものにすぎない。デ

カルト積の一般化は $X\times Y$ 自身よりもむしろ Z を一般化する。(その結果特殊な場合から一般的な場合への移行に際してわずかではあるが用語法上の摩擦が起る。それは救いようがない。それが数学言語の今日実際の使われ方なのである。)さて当面の一般化はこれで手近に得られる。$\{X_i\}$, $(i\epsilon I)$ が集合族ならば，その族のデカルト積は，定義によって，I 内のおのおのの i に対して $x_i\epsilon X_i$ となる族 $\{x_i\}$ 全体の集合である。デカルト積に対しては多少とも流布して使われているいくつかの記号があるが，本書では

$$\mathsf{X}_{i\epsilon I}X_i \quad \text{または} \quad \mathsf{X}_i X_i$$

で示すことにする。すべての X_i が同一の集合 X に等しければ，$\mathsf{X}_i X_i = X^I$ となることは明らかである。もし I が $a\neq b$ の対 $\{a,b\}$ ならば，前に定義したように $\mathsf{X}_{i\epsilon I}X_i$ をデカルト積 $X_a\times X_b$ と同一とするのが慣習である。またもし I が単集合 $\{a\}$ ならば，同様にして，われわれは $\mathsf{X}_{i\epsilon I}X_i$ を X_a 自身と同一とする。順序つき3個組 (ordered triples), 順序つき4個組 (ordered quadruples) 等々も，その添数集合が非順序の3個組，4個組等々である族として定義してよかろう。

$\{X_i\}$ を集合族とし $(i\epsilon I)$，また X をそのデカルト積としてみよう。もし J が I の部分集合ならば，X のおのおのの要素に部分デカルト積 $\mathsf{X}_{i\epsilon J}X_i$ の要素が自然に対応する[7]。この対応を定義するには，X の各要素 x がそれ自身1つの族 $\{x_i\}$ であること，すなわち，すぐ前の分析で I 上の関数であることを思い起すとよい。そうすれば $\mathsf{X}_{i\epsilon J}X_i$ の対応する要素たとえて y は，その関数を J に制限するだけで得られる。陽表的にいってわれわれは $i\epsilon J$ のときにはつねに $y_i=x_i$ と書くのである。$x\rightarrow y$ という対応は X から $\mathsf{X}_{i\epsilon J}X_i$ の上への射影と呼ばれ，われわれはかりにそれを f_J で示すことにする。とくに J が単集合，たとえて $J=\{j\}$ であれば，f_J のことを（$f\{j\}$ の代りに）f_j と書くことにしよう。「射影」という語は幾通りにも使われる。$x\epsilon X$ のとき，x での f_j の値もまた x の X_j の上への射

影，あるいは別の言い方では x の j–座標 (j-coordinate)，と呼ばれる。X のようなデカルト積上の関数は多変数 (several variables) の関数と呼ばれ，特に，デカルト積 $X_a \times X_b$ 上の関数は 2 変数の関数と呼ばれる。

〈練習問題〉 $(\bigcup_i A_i) \times (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j}(A_i \times B_j)$，および（入っている族の定義域が空でないとすれば）共通部分についても同じ等式がなり立つことを証明せよ。また，（空族についての適当な条件をつけて），おのおのの添数 j に対して $\bigcap_i X_i \subset X_j \subset \bigcup_i X_i$，および，共通部分と合併集合が事実この包含式の極限の場合の解 (extreme solutions) として特性づけられるものであること，を証明せよ。このことは，おのおのの添数 j に対して $X_j \subset Y$ ならば $\bigcup_i X_i \subset Y$ であること，および，$\bigcup_i X_i$ がこの極小条件 (minimality condition) をみたすただ 1 つの集合であること，を意味する。共通部分に対する定式化も相似たものである。

註

1. （集合）族という語は集合の集まりというだけの意味に使われることもある。しかしそれをきちんと分出してこようとすれば，ここでのように添数集合から集合 X への関数を考えるのがうまい方法になる。本書に示された通りを多少の記号を混えて実例で書いてみれば，

   $I = \{0, 1, 2\}$，$X = \{A, B, C, D, E\}$，

   のとき，族 x はたとえば

   $x = \{(0, B),\ (1, C),\ (2, D)\}$

   とすることができ，これを項を使って表わせば，

   $x_0 = B$，$x_1 = C$，$x_2 = D$，

   ということになる。そして「関数の値域が関数自身より重要に思える場合」は，上記の x（順序対の集合：関数）を，直ちにそれに対応する値域 $\{B, C, D\}$（あるいは $\{x_0, x_1, x_2\}$）という集合で考えることにすればよい。

   初等的にはこのように添数集合が自然数（またはその部分集合）からなっている場合がほとんどで（その場合の族は第11節（78頁）にあるように特に「列」と呼ばれる），したがって 'index' を「添数」と訳したのであるが，ほんとうは

添数集合は数の集合とはかぎらない。もっと一般的に抽象的に定義されていることを忘れてはならない。たとえば少し後の本文（61頁）では「$\mathfrak{C}$が集合の集まりであれば，$\mathfrak{C}$自身に添数集合の役をさせ，そして族の役には$\mathfrak{C}$上の恒等写像をあてて」いくというような言い方がされるわけである。因みに，このような族の値域をも「(集合）族」と呼ぶことにすれば，この註の最初に触れたように，任意の「集合の集まり」を（集合）族と称することが首肯されてくる。

$\mathfrak{C}=\{x_i \in \mathfrak{C} : i \in \mathfrak{C}$ ならば $x_i=i\}$

だからである。（註4に対応する本文にも明記されている。）

2. 族をその値域で代表させて語ることをさしていると思われる。前註参照。

3. この‘x’はもう「族」の記号ではない。「項」にたいする変数である。

4. 前記註1参照。

5. 第5節28，29頁および第6節33，34頁参照。

6. 第6節33頁，37頁参照。

7. Xのk番目の要素をx_kとしてみると，それは$x_k=(x_{k,0},\ x_{k,1},\cdots\cdots,x_{k,i})$というような順序対である。ただし$x_{k,m}$という形の記号は$\{X_i\}$中の$X_m$に属する要素であることを示す。いまわかりよいように$I=\{0,1,2,3,4\}$，$J=\{0,1,2\}$としてみると，$x_k=(x_{k,0},\ x_{k,1},\ x_{k,2},\ x_{k,3},\ x_{k,4})$に対して$y_k=(x_{k,0},\ x_{k,1},\ x_{k,2})$を対応させればよいわけである。以下の叙述もこれでわかりよくなるであろう。

第10節　逆と合成

たとえばXからYへのすべての関数fに相ともなって，$\mathcal{P}(X)$ から$\mathcal{P}(Y)$への関数，すなわち，Xのおのおのの部分集合Aにその像であるYの部分集合 $f(A)$ を割りつける関数（これもしばしばfと呼ばれる[1]）がある。しかし写像 $A \to f(A)$ の代数的な振舞いの中には欲しくても得られないものがある。$\{A_i\}$ がXの部分集合の族ならば $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$ は真である（証明してみよ）のに，それに対応する共通部分についての等式は一般には偽なのである。(例をあげてみよ。) また像と補集合の間の関連も同じく不満なものである。

Xの要素とYの要素との間の対応はいつもXの部分集合とYの部分集合との間にある行儀のよい対応を誘導するが，それは前向きに像を形成することによるのではなくて，後向きに逆像を形成することによるものである。XからYへの関数fが与えられたとき，fの<u>逆関数</u> (inverse) f^{-1} を，$B \subset Y$ ならば

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

であるような$\mathcal{P}(Y)$ から$\mathcal{P}(X)$ への関数とすればよいのである。式を使わずに言えば：$f^{-1}(B)$はfがBの中へと写像するちょうどそれだけのXの要素からなり，集合$f^{-1}(B)$はfのもとでのBの<u>逆像</u> (inverse image) と呼ばれる，というようになる。fがXをYの上へと写像するための必要十分条件は，Yの空でないおのおのの部分集合のfのもとでの逆像がXの空でない部分集合になっていることである。(証明してみよ。) fが１対１であ

るための必要十分条件は，f の値域内のおのおのの単集合の f のもとでの逆像が X 内の単集合になっていることである。

この最後の条件が充たされれば，f^{-1} という記号はしばしば第２の解釈，すなわち定義域が f の値域であるような関数で，f の値域内のおのおのの y に対する値が X 内のただ１つの x について $f(x)=y$ となっているようなもの，という解釈を賦与される。言い換えれば，１対１の関数 f に対して，われわれは $f(x)=y$ のとき，かつそのときにかぎり $f^{-1}(y)=x$ と書いてよいのである。記号をこのように使うことは f^{-1} の第１の解釈にかすかに抵触する。が，この二重の意味は何の混乱も誘発しそうにない。

像と逆像との間の結合についてはしばらく考察を加えてみるねうちがある。

もし $B\subset Y$ ならば，

$$f(f^{-1}(B))\subset B$$

である。

〈証明〉 $y\epsilon f(f^{-1}(B))$ ならば $f^{-1}(B)$ 内にある x が存在して $y=f(x)$ である。このことは $y=f(x)$ でかつ $f(x)\epsilon B$ であることを意味する。そしてそれゆえ $y\epsilon B$ である。

もし f が X を Y の上へ写像するならば，

$$f(f^{-1}(B))=B$$

である。

〈証明〉 $y\epsilon B$ ならば X 内にある x が，またそれゆえに $f^{-1}(B)$ 内にある x が存在して $y=f(x)$ である。このことは $y\epsilon f(f^{-1}(B))$ を意味する[2]。

もし $A\subset X$ ならば，

$$A\subset f^{-1}(f(A))$$

である。

〈証明〉 $x \in A$ ならば，$f(x) \in f(A)$ で，このことは $x \in f^{-1}(f(A))$ を意味する。

もし f が1対1ならば，

$$A = f^{-1}(f(A))$$

である。

〈証明〉 $x \in f^{-1}(f(A))$ ならば $f(x) \in f(A)$ で，またそれゆえ A 内にある u が存在して $f(x) = f(u)$ である。このことは $x = u$ を含意し，したがって $x \in A$ である。

f^{-1} の代数的な振舞いには例外が出てこない[3]。もし $\{B_i\}$ が Y の部分集合の族ならば，

$$f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$$

で，かつ

$$f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$$

である。証明はすぐに手近に得られる。たとえば，$x \in f^{-1}(\bigcap_i B_i)$ ならば，すべての i に対して $f(x) \in B_i$ であるから，すべての i に対して $x \in f^{-1}(B_i)$。それゆえ，$x \in \bigcap_i f^{-1}(B_i)$。そしてこの論証の全段階は可逆である。また逆像の形成は補集合をつくる操作とも可換である。すなわち，Y のおのおのの部分集合 B に対して

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

である。事実，もし $x \in f^{-1}(Y - B)$ ならば，$f(x) \in Y - B$，したがって $x \in' f^{-1}(B)$ であるから，$x \in X - f^{-1}(B)$。そして全段階は可逆である。（最後の等式は事実一種の交換律であることを見ておいてほしい。それは補集合をとってそれからその逆関数をつくるのは，逆関数をつくってそれからその補集合をとるのと同じである，ということを述べているのである。）

逆についての議論は，1つの関数のなすことがある意味でなされていな

いこともあり得る，ということを示している。われわれが見ようとするつぎのことは，２つの関数のなすことが一挙になされることもあるということである。陽表的にいうと，f がXからYへの関数であり，g がYからZへの関数であれば，f の値域のすべての要素はgの定義域に属し，したがって，$g(f(x))$ はX内のおのおのの x に対して有意になるのである。$h(x)=g(f(x))$ で定義されるXからZへの関数hは関数fとgとの合成 (composite) と呼ばれ，$g\circ f$ あるいはもっと簡単に gf で示される。（関数のこれ以外の種類の複合はどんなものも考えていく予定はないから，本書では後者の簡単な方の記号だけを使用する。）

関数合成の理論では事の順序が大切であるのを見落さないでほしい。gf が定義されるためには，f の値域がgの定義域に包含されていなくてはならない。そしてこのことは逆方向には同じことが生じていなくても，生じ得ることである。たとえば，f がXをYの中へと，そしてgがYをXの中へと写像すれば起ることであるが，fg と gf がともに定義されているというような場合でさえも，関数 fg と gf が同じとは限らないのである。言い換えれば，関数の合成は必らずしも交換律のなりたつものとは限らないのである。

関数の合成は可換でなくともよいが，かならず結合律はなりたつ。f がXをYの中へと写像し，gがYをZの中へと写像し，そしてhがZをUの中へと写像するとすれば，h と gf との合成関数および hg とfとの合成関数をつくることができる。いずれの場合も結果が同じものであることを示すのは単純な練習問題になる。

逆関数と合成関数の結合は大切である。これと似たようなことが数学の全域にわたってひょいひょいと顔を出すからである。f がXをYの中へと写像し，gがYをZの中へと写像するとすれば，f^{-1} は $\mathcal{P}(Y)$ を $\mathcal{P}(X)$ の中へと写像し，g^{-1} は$\mathcal{P}(Z)$ を$\mathcal{P}(Y)$ の中へと写像する。この場合，つ

くれる合成関数は gf と $f^{-1}g^{-1}$ であるが，後者が前者の逆関数である，という立言ができるのである。証明：$x \in X$ で $C \subset Z$ のとき $x \in (gf)^{-1}(C)$ ならば $g(f(x)) \in C$ であり，したがって $f(x) \in g^{-1}(C)$。それゆえ $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$。この論証の各段階は可逆である。

関数に対する逆と合成は関係に対する同種の演算の特例である。そこで特に，X から Y へのすべての関係 R から連想すれば，Y から X への逆関係 R^{-1} (inverse (*or* converse) relation) があるわけで，定義によって $yR^{-1}x$ は xRy を意味する。例：R が X から $\mathcal{P}(X)$ への所属の関係ならば，R^{-1} は $\mathcal{P}(X)$ から X への包含の関係になる。$\mathrm{dom}R^{-1} = \mathrm{ran}R$ および $\mathrm{ran}R^{-1} = \mathrm{dom}R$ はそこに含まれている各定義からの直接の帰結である。関係 R が関数であれば，xRy と $yR^{-1}x$ という 2 つの同値な立言は，$R(x)=y$ および $x \in R^{-1}(\{y\})$ という同値な形に書きかえることができる。

可換性についての困難があるために，関数の合成の一般化は注意深く取扱わなくてはならない。関係 R と S との合成は，R が X から Y への関係で，S が Y から Z への関係の場合に定義される。X から Z への合成関係 T は，$S \circ R$ または単純化して SR で示される。そこで，xRy でかつ ySz であるような要素 y が Y 内に存在するとき，かつそのときにかぎって xTz であるというように定義される。教育用の例として，たとえば，人間の男の集合の中で R は「息子」を意味し，S は「兄弟」を意味するとしよう。言い換えれば，xRy は x が y の息子であることを意味し，ySz は y が z の兄弟であることを意味するわけである。この場合に合成関係 SR は「甥」を意味する。（問：R^{-1}, S^{-1}, RS および $R^{-1}S^{-1}$ は何を意味するか？）もし R も S もともに関数ならば，xRy と ySz はそれぞれ $R(x)=y$ および $S(y)=z$ と書き直すことができる。xTz ならば，かつそのときにかぎり $S(R(x))=z$ ということがいえるから，関数の合成は事実時として相対積 (relative product) と呼ばれるもの[4] の特別な場合である。

逆と合成との代数的な性質は関係に対しても関数に対するのと同じである。そこで，特にとり出せば，合成〔関係〕はただ偶然にしか可換ではないが，かならず結合律はみたし，またかならず $(SR)^{-1}=R^{-1}S^{-1}$ という等式を介して逆〔関係〕と結合される。（証明は？）

関係の代数はいくつかの面白い公式を供してくれる。かりに1つの集合 X 内の関係だけを考えるとし，特に I は X における相等関係（X 上の恒等写像といっても同じ）であるとしよう。関係 I は乗法のときの単位のようなはたらきをする。それは X 内のすべての関係 R に対して $IR=RI=R$ であるという意味である。問：I と RR^{-1} と $R^{-1}R$ の間に関連はあるか？同値関係を定義する3つの性質は代数用語ではつぎのように定式化できる：反射性は $I\subset R$ を意味し，対称性は $R\subset R^{-1}$ を意味し，推移性は $RR\subset R$ を意味する。

〈練習問題〉（どの問でも f は X から Y への関数と仮定する。）
(i)もし g が Y から X への関数で gf が X 上での恒等〔写像〕ならば，f は1対1であり，g は Y を X の上へと写像する。(ii) X のあらゆる部分集合 A と B に対して $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$ である必要十分条件は，f が1対1であることである。(iii) X のあらゆる部分集合 A に対して $f(X-A)\subset Y-f(A)$ である必要十分条件は，f が1対1であることである。(iv) X のあらゆる部分集合 A に対して $Y-f(A)\subset f(X-A)$ である必要十分条件は，f が X を Y の上へと写像することである。

註

1. 第8節註4に対応する附近の本文（54頁）参照。
2. これで $B\subset f(f^{-1}(B))$ が証明できたから，すぐ上の命題と合せて $f(f^{-1}(B))=B$ が言えるわけである。つぎの2つの命題についても同様。
3. 代数的な振舞いというのは，その演算の結合，交換，分配等に関する充足，

違背などをさすものと考えてよいであろう。特に各種の演算で交換律をみたさないものがよく指摘される。だからここでもまず∪や∩の演算の交換性がためされている。

4. Suppes, [1], p. 63 によると，関係AとBの相対積 $A \circ B$ はつぎのように定義される。

$A \circ B =_{Df} \{(x, y) : xAz$ でかつ zBy なる z が存在する$\}$

そこで実例では，$A=\{(1,\ 3),\ (2,\ 3)\}$，$B=\{(3,\ 1)\}$

のとき，

$A \circ B=\{(1,\ 1),\ (2,\ 1)\}$，$B \circ A=\{(3,\ 3)\}$

である（記号は Suppes のでなく本書のものに合わせた）。

第11節　数

2とはどれほどか。もっと一般的にいってわれわれは数をどのように定義すべきであろうか。その答を用意するために，ある集合Xを考え，aがX内にあり，bもX内にあって，かつ$a \neq b$であるような，すべての非順序対$\{a, b\}$の集まりPをつくってみよう。集まりP内のすべての集合が1つの性質，すなわち2つの要素からなるという性質を共有することは明らかであると思われる。そこで「2であること」(“twoness”)は集まりP内のすべての集合のもつその共通性質のことである，と定義してみたくなるが，その誘惑にはさからわなくてはならない。そのような定義は結局のところ数学上はナンセンスなのである。「性質」とは何であるのか。ただ1つの性質がP内のすべての集合に共有されているということをどうして知るのか。

いくらか思案してみないと，「共通の性質」というような漠然とした表現を使わないで，提案された定義の背後にある想念を生かす道は思いつかないであろう。性質を集合，すなわちその性質をもったすべての対象からなる集合と同一視するのは，数学上いたるところで使う手である。であるのになぜここでは使えないのか。言い換えれば，なぜ「2」を集合Pと定義してはいけないのか。これと似たようなことで時にやっていくこともあるが，それは完全にはうまくいかない。厄介なのは，われわれの当面の限定された提題がPに，したがって最後はXに依存しているからである。せいぜいのところこの提案では，Xの部分集合に対して2であることが定義

されるにすぎない[1]。つまり，それではどんなときにXに包含されない集合に２であるという属性を与えてよいか，の手掛りは得られないのである。

２つの出口がある。一方の道は，特定の集合への制限を放棄して，そのかわりに $a \neq b$ であるあらゆる可能な非順序対 $\{a, b\}$ を考えることである。これらの非順序対は集合を構成しない。だから「２」の定義をそれに基づいて立てるためには，そこで考察する理論の全体はあらたな理論に属する「非集合 (unset)」(つまり類 (class)) を包含するように拡張されなくてはならないであろう。それでもやっていける。しかしここではそうはしないでいきたい。われわれは別の道をとろう。

数学者なら１メートルをどうして定義するであろうか。上記で概略をみたのと類比的なその手続きはつぎのような２段階を含むようである。第１段では，定義される概念の予想モデル (intended model) になる対象——言い換えれば，直観または実用上，およそ長さ１メートルと言えるものがありとすればこれがそうだと言える対象——を選定する。第２段では，この宇宙の中にある選定されたものと同じ長さのすべての対象の集合をつくり(これは１メートルが何であるかを知ることに依存しないのに注意)，そのようにしてつくられた集合を１メートルだと定義するのである[2]。

実際には１メートルはどうして定義されるか。この例は，この問に対する答が数の定義への進入路を示唆してくれれば，ということで選んだものであった。その問題点は，通例の１メートルの定義では第２の段階が省かれる，というところにある。多少とも任意な規約によって１つの物体が選ばれ，そしてその長さが１メートルと呼ばれる。この定義が（「長さ」とは何を意味するか，と問うて）循環論になっていると非難されるようなら，異議のさしはさみようのない指示的な定義 (demonstrative definition) に変えることは容易にできる[3]。つまり結局は１メートルとはその選ばれた物体に等しいことであるとして定義することをやめさせるものはなにも

ないのである。この指示的な進入路をとっても，いかなるときに「1メートルであること」(one-meter-ness) がどれか他の物体にもその性質として帰属させられるかは，まったく以前同様に説明しやすいことなのである。すなわち，その新らしい物体が選ばれた規準物体と同じ長さをもっている場合だけ，と言えばよい。重ねて註釈を加えておくが，2つの物体が同じ長さをもっているかどうかを決定することは，比較という単純な行為にのみ依存するのであって，長さの精密な定義があるかどうかには依存しないのである。

上記の考察を動機にして，われわれは前に2を(直観的に言って)ちょうど2個の要素をもつある特定の集合と定義しておいた[4]。そのときの規準集合はどうして選ばれたか。他の数に対してはどうしてそのような規準集合を選べばよいか。この問に対して1つの答を他のものより優先して選ばなくてはならないとする強制的な数学上の理由は何もない。事柄全体がほとんど趣味の問題である。その選定はおそらく単純さと経済性を配慮して進められるべきであろう。普通になされるような特定の選定の動機を与えるために，ある1つの数，たとえて7，がすでに（7つの要素をもつ）集合として定義されているものとしよう。この場合どのようにして8を定義するべきであろうか。言い換えれば，ちょうど8個の要素からなる集合はどこに見出されるか。集合7の中に7つの要素は見出せる。それにつけ加える第8の要素として何を使えばよいか。この最後の問に対する1つの合理的な答は，数7（という集合）自身である。そこで言わんとするのは，7の7つの要素と7〔自身〕をいっしょにしてつくられる集合を8の定義とする，ということである。この提唱によれば，おのおのの数はそれ自身に先行する数（前者 predecessors）の集合に等しくなるのに注意してほしい[5]。

前段はすべての集合に対して意味をもつ集合論上の構成の動機づけを行なうものであるが[6]，それは数の構成に際してしかおもしろ味のないもの

である。すべての集合 x に対して，x の後者 (successor) x^+ とは，x の要素に x をつけ加えて得られる集合のことだ，と定義してみる。言い換えれば

$$x^+ = x \cup \{x\}$$

である。（x の後者はよく x' で示される[7]。）

さてこれで自然数を定義する用意ができた。0が要素零の集合であることを定義するには，選択の余地はない。われわれは（前にやったとおり）

$$0 = \varnothing$$

と書かなくてはならない。もしすべての自然数がその前者〔先行数〕の集合に等しいとするのなら，1や2や3を定義するのにもまた選択の余地はない。われわれは

$$1 = 0^+ (= \{0\}),$$

$$2 = 1^+ (= \{0, 1\}),$$

$$3 = 2^+ (= \{0, 1, 2\})$$

などと書かなくてはならない。「などと」という語は，それによってわれわれは通例の記数法を採用し，以後はこれ以上何の説明もことわりもなしに4とか956というような数字を自由に使うのだ，という意味である。

これまでに述べたかぎりのことからは，後者の構成が同じ1つの集合内で無限にやっていける，ということは出てこない。あらたな集合論の原理が必要なのである。

無限の公理 (axiom of infinity)　0を含み，かつそのおのおのの要素の後者を含む集合が存在する。

この公理の名前の理由は明らかであろう。われわれはまだ無限の精確な定義を与えていなかった。しかし，この無限の公理で述べているもののような集合が無限と呼ばれるにふさわしいというのはわかりよいことだと思

われる[8]。

さしあたり，$0\epsilon A$ で $x\epsilon A$ のときつねに $x^{+}\epsilon A$ であれば，集合Aは後者集合（successor set）であると言うことにしよう。このことばでいえば無限の公理は簡単に，後者集合が存在する，というだけのことになる。後者集合のすべての（空でない）族の共通部分は自身１つの後者集合であるから（証明は？），Aに包含されるあらゆる後者集合の共通部分は，１つの後者集合ωである。集合ωはすべての後者集合の部分集合である。事実，Bが任意の後者集合であるとすれば，$A\cap B$ も後者集合である。$A\cap B\subset A$であるから，集合 $A\cap B$ はωの定義に入っていた集合の１つである。それから，$\omega\subset A\cap B$ したがって $\omega\subset B$ ということが出てくる。こうして確立された最小性がωを一意に特性づける。外延性公理によって，すべての他の後者集合に包含される後者集合は１つしか存在し得ない，ということが保証される。ある１つの自然数（natural number）とは，定義によって，最小後者集合ωの要素のことである。この自然数の定義は，自然数は０，１，２，３「等々」からなる，という直観的な記述に対応する厳密な述べ方である。ついでに言えば，われわれが全自然数の集合に対して使っている記号（ω）にはこの主題について書く人達の支持票に票差があるのであるが，他に文句なしの多数票を得ているといったものはない。本書ではその記号が一貫してかつもっぱら上に定義された意味に使われる。

読者がこの自然数の定義に関連して味わうかもしれない軽微な不快感はまったく普通のまた大ていの場合は一時的なものである。厄介なことというのは，ここで前にも一度（順序対の定義で）あったように[9]，定義される対象が当面関係のない構造をもっていて，それが(実際は無害であるが)邪魔をするように見えることである。７の後者が８であるというのは言ってほしいことなのであるが，７が８の部分集合であるとか７が８の一要素であるとか言われると混乱する。われわれはこの余分な構造を，自然数の

もっとも重要で自然な性質を導き出し終るまでだけ利用することにしよう。その後はこの余分な構造は忘れてしまっても大丈夫である。

添数集合が1つの自然数であるかまたは全自然数の集合になっているような集合族 $\{x_i\}$ は〔数〕列（sequence）（前者は有限，後者は無限の列）と呼ばれる。$\{A_i\}$ が集合の列で，その添数集合が自然数 n^+ であれば，その列の合併集合は

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i \quad \text{または} \quad A_0 \cup \cdots \cup A_n$$

で示される。添数集合が ω であれば，記法は

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{または} \quad A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

となる。列の共通部分とデカルト積は同様に

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i, \qquad A_0 \cap \cdots \cap A_n,$$

$$\mathsf{X}_{i=0}^{n} A_i, \qquad A_0 \times \cdots \times A_n$$

および

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i, \qquad A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots,$$

$$\mathsf{X}_{i=0}^{\infty} A_i, \qquad A_0 \times A_1 \times A_2 \times \cdots$$

で示される。「列」という語には数学の文献では若干の違った使われ方もあるが，それらの間の相違は概念上というより記法上のものである。違った使い方のうちもっとも普通なのは0の代りに1から始めるものである。言い換えれば，それは添数集合が ω の代りに $\omega - \{0\}$ になった族を指示しているのである。

註

1. ここでは分出公理が立てられた状況を想起してみるべきであろう。

2. 具体的な1つのモデルをとり，それとの何らかの意味での同等性（同型性）により求める対象（の集合）を定義する，というのは，次節の終りに出てくる帰納的（回帰的）定義の着想に通ずる考え方である。

3. 指示的定義というのは指称的定義 (ostensive definition) とも言われる。具体例を指して，たとえば，長さとは何かなどと言わずに「これが1メートルだ」と約定すること。

4. 第8節の終りの方で $2=\{\phi,\{\phi\}\}$ と仮に定義してあったのを想起すること。

5. 前記の第8節終りの0，1，2の各定義のところをもう一度読み返しておくとよい。

6. これは前記註2で言及した帰納的定義によるものの一種（先行者をとり込んでいく仕方によるもの）をさしている。形式化された言語では中枢的な概念の多くが帰納的に定義される。たとえば本書でもすでに第2節9，10頁に出ている「文」の定義は，完全に形式化はされていないが，この線に沿ったものである。

7. 本書では記号‘′’はすでに第5節以来仮の絶対補集合に対して使われているから，「後者」の記号としては使わない。

8. この無限の公理が必要とされるところまでの展開を「一般集合論」(general set theory) と呼ぶならわしがある。

9. 第6節45頁参照。

第12節　ペアノの公理

ここでちょっとしたわき道に入る。このわき道の目的は自然数の算術理論との束の間の接触をはかることである。集合論の見地からいえば，これは快いぜいたくである。

全自然数の集合ωに関してわれわれが知っているもっとも重要なことは，それがすべての後者集合の部分集合になる一意的な後者集合だということである。ωが後者集合だということは

（Ⅰ）　$0\in\omega$

（もちろんここでは $0=\varnothing$），および

（Ⅱ）　$n\in\omega$ ならば $n^{+}\in\omega$

（ここで $n^{+}=n\cup\{n\}$）ということを意味する。ωの最小性は，ωの部分集合Sが後者集合ならば $S=\omega$ である，と言えば表現できる。それに代る言い方として，またもっと基本的な用語で言えば，つぎのようになる。

（Ⅲ）　$S\subset\omega$，$0\in S$ で，かつ $n\in S$ のときはつねに $n^{+}\in S$ であるならば，$S=\omega$ である。

性質（Ⅲ）は数学的帰納法の原理（principle of mathematical induction）として知られているものである。このωの性質のリストにもう2つ

（Ⅳ）　ωに属するすべてのnに対して $n^{+}\neq 0$，

および

（Ⅴ）　nとmがωに属し，$n^{+}=m^{+}$ ならば，$n=m$ である，

というのをつけ加えよう。

（Ⅳ）の証明は自明である。n^+ はいつでも n を含み，0は空であるから，n^+ が0と異なることは明白である。（Ⅴ）の証明は自明ではない。それは1対の補助命題に依存する。その第1の命題は，起るべきでないものは実際に起らないということを立言する。証明にこめられている思量がたとえ病理的で自然数論で予見される算術の精神とは異質に見えようとも，結果が手段を正当化してくれる。第2の命題は，たったいま排除されたのとまったく類似の振舞いを指すものである。しかしながら今度は一見技巧的な思量は肯定の結果を生ずる。すなわち，そっと驚かすようなことはいつも起るものだ，というのである。これらの言明はつぎのようになる。(i)自然数はすべてその要素のいかなるものの部分集合にもならない。また(ii)自然数の要素はすべてその部分集合である。ある集合がその含む（ϵ）ものをすべて包含する（$\subset$）という性質をもつとき，推移的 (transitive) 集合と呼ばれることがある。もっと精確にいえば，Eが推移的であると言うことは，$x\epsilon y$ でかつ $y\epsilon E$ ならば $x\epsilon E$ を意味するのである。（関係の理論でこの語のわずかばかり違った用法に出喰したことを思い起してほしい[1]）。この言語では，(ii)は，すべての自然数は推移的である，というようになる。

(i)の証明は数学的帰納法の原理の典型的な応用である。Sをその要素のどれにも包含されないような自然数nのすべてからなる集合としよう。（陽表的に言えば，$n\epsilon\omega$ でかつnはn内のいかなるxに対してもxの部分集合にならないとき，かつそのときにかぎり，$n\epsilon S$。）0はそのいかなる要素の部分集合でもないから，$0\epsilon S$ が出てくる。さて $n\epsilon S$ と仮定する。nはnの1つの部分集合であるから，nはnの要素でないと，したがってn^+はnの部分集合ではない，と推論してよい[2]。n^+ は何の部分集合になれるか。もし $n^+\subset x$ ならば $n\subset x$ である[3]から（$n\epsilon S$ も考えて）$x\epsilon' n$。そこで，n^+ はnの部分集合にはなれず，また n^+ はnのどの要素の部分集合にもなれない，ということが出てくる。このことは n^+ が n^+ のどの要素の部分

集合にもなれないこと，したがって $n^{+}\epsilon S$ であることを意味する。これで求める結論(i)は（Ⅲ）から帰結する。

(ii)の証明もまた帰納法による。今度は S をあらゆる推移的自然数の集合としよう。(陽表的にいえば，$n\epsilon\omega$ でかつ n に含まれるすべての x に対して x が n の部分集合であるとき，かつそのときにかぎって $n\epsilon S$。$0\epsilon S$ という要件は空虚な意味で満たされる[4]。さて $n\epsilon S$ としてみよう。$x\epsilon n^{+}$ ならば，$x\epsilon n$ かまたは $x=n$ である。第1の場合には（$n\epsilon S$ だから）$x\subset n$ で，それゆえ $x\subset n^{+}$ であり，第2の場合も，もっと自明な理由から $x\subset n^{+}$ である。そこで，n^{+} のすべての要素は n^{+} の部分集合であるということ，言い換えれば $n^{+}\epsilon S$ ということが出てくる。これで求める結論(ii)は（Ⅲ）から帰結する。

いまや（Ⅴ）を証明する準備ができた。事実 n と m が自然数で $n^{+}=m^{+}$ であると仮定しよう。$n\epsilon n^{+}$ から，$n\epsilon m^{+}$，したがって $n\epsilon m$ かまたは $n=m$ ということが出てくる。同様にして $m\epsilon n$ かまたは $m=n$ である。$n\neq m$ ならば，$n\epsilon m$ かつ $m\epsilon n$ でなくてはならない。(ii)によって n は推移的であるから，$n\epsilon n$ が出てくる。しかしながら $n\subset n$ から，これは(i)に矛盾することになり，これで証明は完結する。

（Ⅰ）—（Ⅴ）の命題はペアノの公理として知られている。そしてそれらは通例一切の数学知識の源泉と考えられてきた。これらの公理から（すでに見てきた集合論の原理とあわせれば），整数，有理数，実数および複素数を定義することができるし，またそれらの数のふつうの算術や解析的な性質を引き出すこともできる。そのようなことを示す計画はこの書物の及ぶ範囲には入らないが，興味をもたれる読者は他の書物に難なくそれが出ているところを見つけて研究してみられるはずである。

帰納法はいろいろなことを証明するばかりでなく，いろいろの定義に使われることも多い。特に，f を集合 X から同じ集合 X の中への関数である

とし，aをXの要素としてみる。Xの要素の無限列$\{u(n)\}$（すなわち，ωからXへの関数u）を大体つぎのような仕方で定義してみようとするのは当然のことと思われる。つまり，$u(0)=a$, $u(1)=f(u(0))$, $u(2)=f(u(1))$等々と書く，というようにするのである。ここでもしこのように定義するであろうと想定されるひとが「等々」という語句を説明してみよと求められれば，そのひとは帰納法によりかかるであろう。そのひとは，その語句は，$u(0)$ をaと定義し，それから帰納的にすべてのnに対して $u(n^+)$ を $f(u(n))$ と定義するというだけの意味です，と答えることであろう。それでよいように聞えるかもしれないが，存在の立言に対する正当化とすれば，それでは不十分である。数学的帰納法の原理は実のところざっと，陳述された全条件を満たす関数はたかだか1つあり得る，ということの証明にはなるが，そのような関数の存在を確立するわけではない。つぎのような結論を得ることが必要である。

回帰定理 (recursion theorem)，aが集合Xの要素であり，かつfがXからXの中への関数であるならば，$u(0)=a$ でかつωに属するあらゆるnに対して $u(n^+)=f(u(n))$ であるようなωからXの中への関数uが存在する。

〈証明〉　ωからXへの関数は$\omega\times X$のある種の部分集合であることを思い起して，uを陽表的に順序対の集合として構成しよう。そのために，$(0,a)\in A$ でかつ $(n,x)\in A$ ならかならず $(n^+,f(x))\in A$，といえるような$\omega\times X$の部分集合Aを全部集めた集まり$\mathcal{C}$を考えよう。$\omega\times X$はそれらの性質をもっているから，集まり$\mathcal{C}$は空ではない。それゆえ，その集まり$\mathcal{C}$のもつあらゆる集合の共通部分uをつくることはできる。u自身が$\mathcal{C}$に所属することはみやすいから，あと証明しなくてはならないのはuが関数であることだけである。言い換えれば証明しなくてはならないのは，おのおのの自然数nに対して $(n,x)\in u$ となるようなたかだか1つの要素xがXに存

在する，ということである。(陽表的にいえば，(n, x) と (n, y) がともに u に属するなら $x=y$，ということである。) その証明は帰納法による。たかだか1つの x に対して$(n, x)\epsilon u$ が実際に真といえるようなあらゆる自然数 n の集合を S とする。証明しようとするのは，$0\epsilon S$ でかつ $n\epsilon S$ なら $n^+\epsilon S$，ということである。

0は S に属するか。もし属しないとすれば，a とは別の b があって $(0, b)\epsilon u$ である。この場合，$u-\{(0, b)\}$ という集合を考えてみよう。この引き去ったあとの集合は ($a\neq b$ であるから) まだ $(0, a)$ を含んでいること，およびこの引き去ったあとの集合が (n, x) を含むなら $(n^+, f(x))$ をも含むことを見逃してはならない。第2の立言の理由は，$n^+\neq 0$ であるから捨てた要素は $(n^+, f(x))$ に等しくはならない，ということである。結局，言い換えれば $u-\{(0, b)\}\epsilon\mathfrak{C}$ である。これは u が $\mathfrak{C}$ 内の最小集合であるという事実に矛盾するから，$0\epsilon S$ と結論してよい。

さて，$n\epsilon S$ と仮定する。これは X の中に $(n, x)\epsilon u$ となるような一意的な要素 x が存在することを意味する。$(n, x)\epsilon u$ から $(n^+, f(x))\epsilon u$ が出る。もし n^+ が S に属しないなら，$f(x)$ と違う y があって $(n^+, y)\epsilon u$ である。ここで $u-\{(n^+, y)\}$ という集合を考えよう。この引き去ったあとの集合は ($n^+\neq 0$ であるから) $(0, a)$ を含んでいること，およびこの引き去ったあとの集合がたとえば (m, t) を含むなら $(m^+, f(t))$ をも含むことを見逃してはならない。事実，$m=n$ ならば t は x でなくてはならず，この引き去ったあとの集合が $(n^+, f(x))$ を含む理由は $f(x)\neq y$ である。他方 $m\neq n$ ならば，この引き去ったあとの集合が $(m^+, f(t))$ を含む理由は $m^+\neq n^+$ である。結局，言い換えれば $u-\{(n^+, y)\}\epsilon\mathfrak{C}$。これはまた u が $\mathfrak{C}$ の中の最小集合であるという事実に矛盾するから，$n^+\epsilon S$ と結論してよい。

回帰定理の証明はこれで完結である。回帰定理の応用は帰納による定義 (definition by induction) と呼ばれる。

〈練習問題〉　n が自然数ならば $n \neq n^+$; $n \neq 0$ ならば $n = m^+$ となる自然数 m が存在する，ということを証明せよ。ω が推移的であることを証明せよ。E をある自然数の空でない部分集合とすれば，m が k とは別な E の要素のときつねに $k \in m$ となるような要素 k が E 内に存在することを証明せよ。

註

1. 第７節49頁参照。第１節末（５頁），第８節（54頁下段）も参照するとよい。

2. ここの証明は少し補足的に言うとつぎのようになる。$n \subset n$ はいかなる集合についてもいえる。ところが $n \in S$ と仮定したから，n の要素で n を部分集合とするものはないはずである。だから $n \in' n$。一方，自然数の定義から $n \in n^+$ であるが，いま $n \in' n$ であるから，n^+ の要素で n の要素にならないもの（つまり n）がある。すなわち $n^+ \subset n$ ではない。

3. 関係 $\subset$ は推移的であることと，自然数については $n^+ = n \cup \{n\}$ だからつねに $n \subset n^+$ がいえること，とによる。

4. 第３節17頁参照。

第13節　算　　術

自然数に対する加法の導入は帰納による定義の典型的な例である。事実，回帰定理から，おのおのの自然数mに対して $S_m(0)=m$ でかつ $S_m(n^+)=(S_m(n))^+$ がすべての自然数nでなり立つといえるようなωからωへの関数 S_m が存在する，ということが出てくる。加法の一般算術上の性質は数学的帰納法の原理の反復利用によって証明できる。そこで，たとえば，加法は結合律にしたがう，というのをとってみる。それは，k，mおよびnが自然数ならつねに，

$$(k+m)+n=k+(m+n)$$

を意味する。証明はnについての帰納法によってつぎのように進められる。$(k+m)+0=k+m$ でかつ $k+(m+0)=k+m$ であるから，$n=0$ のとき与式は真である。もし与式がnに対して真ならば，$(k+m)+n^+=((k+m)+n)^+$（定義より）$=(k+(m+n))^+$（帰納法の仮定より）$=k+(m+n)^+$（加法の定義より）$=k+(m+n^+)$（同前）。これで論証は完結である。加法が交換律にしたがう（すなわち，あらゆるmとnに対して，$m+n=n+m$）ということの証明は，もう少し手がこんでくる。すぐだとばかり飛びつけば失敗しかねない。その手というのは，nについての帰納法によって，(i) $0+n=n$ および (ii) $m^++n=(m+n)^+$ を証明し，それから(i)と(ii)を通してmについての帰納法で求める交換律の式を証明することである。

同様な技法が積および指数の定義やそれらの基本的な算術上の性質の導出に際しても適用できる。乗法を定義するために，$P_m(0)=0$ で，すべて

の自然数nに対して$p_m(n^+)=p_m(n)+m$となるような関数P_mをつくり出すべく回帰定理を適用してみれば，定義によって$P_m(n)$の値が積$m \cdot n$となる。（黒点は省略されることが多い。）乗法は結合律および交換律にしたがう。証明は加法に対して使われたものをそのままあてはめればよい。分配律（すなわち，k, mおよびnが自然数ならばつねに$k \cdot (m+n)=k \cdot m+k \cdot n$である，という立言）は数学的帰納法の原理のもう１つの手軽な帰結である。（nについて帰納法を使え。）和と積をこのような仕方で切りぬけてきたひとならだれでも指数についてはもう何の苦労もしないことであろう。回帰定理が，$e_m(0)=1$で，すべての自然数nに対して$e_m(n^+)=e_m(n) \cdot m$となるような関数e_mをうみ出してくれる。そして$e_m(n)$の値が定義によって巾（べキ）m^nになる。巾（べキ）の性質の発見と確立は，積に関する言明の細かい証明と同様に読者の練習問題に残しおいても大丈夫であろう。

いくらか注意するに値するつぎの話題は自然数の集合における順序の理論である。そのために，どの自然数が他のどれに属するかという問を少々注意深く調べにかかろう。形式的には２つの自然数mとnとは$m \in n$か$m=n$か$n \in m$であれば比較可能であると言われる。立言：２つの自然数はつねに比較可能である。この立言の証明はいくつもの段階からなる。ω内のおのおののnに対して，nと比較可能なω内のあらゆるmの集合のことを$S(n)$と書き，Sを$S(n)=\omega$となるようなあらゆるnの集合としてみよう。これらの用語でいえば上記の立言は$S=\omega$ということである。われわれは$S(0)=\omega$（すなわち$0 \in S$）を示すことで証明を始める。明らかに$S(0)$は0を含む。もし$m \in S(0)$ならば，$m \in 0$は不可能であるから，$m=0$（その場合$0 \in m^+$）であるかまたは$0 \in m$（この場合もまた$0 \in m^+$）である。したがって，あらゆる場合に$m \in S(0)$ならば$m^+ \in S(0)$で，このことは$S(0)=\omega$を証明している。つぎに$S(n)=\omega$ならば$S(n^+)=\omega$を示すことによってわれわれの証明は完結する。（$n^+ \in S(0)$であるから）$0 \in S(n^+)$と

いう事実は直ちにわかる。あと証明すべきことは，$m\epsilon S(n^+)$ ならば $m^+\epsilon S(n^+)$ ということである。$m\epsilon S(n^+)$ であるから，それゆえに，$n^+\epsilon m$（その場合 $n^+\epsilon m^+$）か，または $n^+=m$（同前）か，または $m\epsilon n^+$ である。この最後の場合が今度は m^+ と n との振舞いにしたがって場合分けされる。$m^+\epsilon S(n)$ であるから，$n\epsilon m^+$ か，または $n=m^+$ か，または $m^+\epsilon n$ かであるとしなくてはならない。この可能な場合のうち最初のものは現在の状況（すなわち $m\epsilon n$）[1] と両立しない。その理由は，もし $n\epsilon m^+$ ならば $n\epsilon m$ かまたは $n=m$ であり，したがっていずれにしても $n\subset m$ であるが，どんな自然数もその要素の1つの部分集合ではないということが既知だからである。残りの2つの可能な場合はともに $m^+\epsilon n^+$ を含意し，これで証明は完結する。

前段は，m と n が ω の中にあれば，（$m\epsilon n, m=n, n\epsilon m$ の）3つの可能な場合のうち少なくとも1つがなりたたなくてはならない，ということを含意している。事実，いつもそれらの中の正確に1つがなりたつ，ということは見やすいことである。（その理由はまた自然数はその要素の1つの部分集合ではないという事実の適用例である。）前段のもう1つの帰結は，もし n と m が別々の自然数ならば，$m\epsilon n$ となる必要十分条件は $m\subset n$ だ，ということである。実際，$m\epsilon n$ ならば $m\subset n$，というのは n の推移性にすぎない[2]。逆にもし $m\subset n$ でかつ $m\neq n$ ならば，$n\epsilon m$ は起りえない（というのはそうすれば m はその要素の1つのものの部分集合ということになるから），それゆえに $m\epsilon n$ である。もし $m\epsilon n$ ならば，あるいは同値な言い方であるが，m が n の部分集合ならば，$m<n$ と書いて，m は n よりも小 (less) ということにしよう。もし m が n より小であるかさもなければ n に等しいことがかわっていれば，$m\leqq n$ と書く。 $\leqq$ と $<$ は ω における関係であることに注意してほしい。前者は反射的であるが後者はそうではない。またいずれも対称的ではなく，両者ともに推移的である。もし $m\leqq n$ でかつ $n\leqq m$ であれば $m=n$ である[3]。

〈練習問題〉 $m<n$ ならば $m+k<n+k$ であることを証明せよ。また $m<n$ で $k\neq 0$ ならば $m\cdot k<n\cdot k$ であることを証明せよ。Eが自然数の空でない集合ならば，E内のあらゆるmに対して $k\leqq m$ となるような要素kがE内に存在する，ということを証明せよ。

2つの集合EとF（かならずしもωの部分集合とはかぎらぬ）は，それらの間に1対1対応が存在するならば対等（equivalent）であるといわれ，記号では$E\sim F$と書く。個々の集合Xの部分集合に対しては，この意味での対等が，そのベキ集合$\mathcal{P}(X)$における同値関係になる，ということは容易に検証できる。

自然数nのすべての真部分集合はそれより小さなある自然数（すなわちnのある要素）に対等である。この立言の証明は帰納法による。$n=0$に対しては自明である。もしnに対して真であって，かつEが n^+ の真部分集合であるとすれば，Eはnの真部分集合であって帰納法の仮定があてはまるか，$E=n$ で結果は自明となるか，または $n\in E$ であるかである。最後の場合には，nには入るがEには入らない数kを見出し，$i\neq n$ のときは $f(i)=i$ でまた〔$i=n$ ならば〕$f(n)=k$，と書きE上に関数fを定義してみる[4]。明らかにfは1対1で，かつfはEをnの中へと写像する。fのもとでのEの像はnに等しいかあるいは（帰納法の仮定によって）nのある要素に対等であり，したがって結局，E自身はつねに n^+ のある要素に対等である，ということが出てくる。

1つの集合がそれ自身の真部分集合に対等になり得る，というのはおだやかながら衝撃的な事実である。たとえば，もしωからωへの関数fがω内のあらゆるnに対して $f(n)=n^+$ と書いて定義されるとすれば，fは全自然数の集合と0でない自然数からなるその真部分集合との間の1対1対応である。結構なことに，たとえ全自然数の集合はこの奇異な性質をもっ

ているとしても，おのおの個別の自然数に対しては穏健さがゆきわたっていることが知られるのである。言い換えれば，$n \epsilon \omega$ ならば n は n の真部分集合に対等にはならない。$n=0$に対してはそのことは明らかである。いま n に対してそれが真であると仮定し，また f は n^+ から n^+ の真部分集合 E への１対１対応であると仮定しよう。$n \epsilon' E$ ならば f の n への制限[5]は n と n の真部分集合との間の１対１対応となり，それは帰納法の仮定に矛盾する。$n \epsilon E$ ならば n は $E-\{n\}$ と対等になり，したがって帰納法の仮定によって $n=E-\{n\}$ である。これは $E=n^+$ であることを含意し，そしてそれは，E が n^+ の真部分集合であるとの仮定に矛盾するわけである。

集合 E はある自然数に対等であれば<u>有限</u>（finite）であると呼ばれ，その他の場合 E は<u>無限</u>（infinite）である。

〈練習問題〉 この定義を ω が無限であることの証明に使ってみよ。

集合はたかだか１つの自然数と対等になることができる。（証明。どのような２つの相異なる自然数をとっても一方は他方の１つの要素であり，それゆえ真部分集合になっていなくてはならない，ということは既知である。そこで前段から，それらが対等になり得ないことが出てくる。）有限集合は決して真部分集合と対等にならないと推論してよいのである。言い換えれば，われわれが有限集合を離れないかぎりは，全体はつねにそのいかなる部分よりも大きいのである。

〈練習問題〉 有限性の定義からのこの帰結を ω が無限であることの証明に使ってみよ。

自然数のすべての部分集合は１つの自然数に対等であるから，有限集合のすべての部分集合は有限である，ということもまた帰結する。

有限集合Eに含まれる<u>要素の数</u>（number of elements）は定義によってEに対等な一意的な自然数である。われわれはそれを$\#(E)$で示すことにしよう。Eと$\#(E)$との間の対応がある集合Xの有限部分集合に制限されるならば，その結果がベキ集合$\mathcal{P}(X)$の部分集合からωへの関数となるのは明らかである。この関数はよく知られた集合論の関係や演算と苦もなく関係づけられる。そこで，たとえば，EとFが$E\subset F$であるような有限集合ならば，$\#(E)\leqq\#(F)$である。（理由は，$E\sim\#(E)$かつ$F\sim\#(F)$から，$\#(E)$が$\#(F)$の1つの部分集合に対等であるということが出てくるからである。）もう1つ例をあげれば，EとFが有限集合ならば$E\cup F$が有限であり，しかもEとFが互いに素ならば，$\#(E\cup F)=\#(E)+\#(F)$，という立言がある。証明に際しての決め手は，mとnが自然数ならば，和$m+n$に含まれるmの補集合はnに対等だ，ということである。この補助事実の証明はnについての帰納法でやれる。同様の技法で，EとFが有限集合ならば，$E\times F$やE^F [6] もまたそうであり，しかも$\#(E\times F)=\#(E)\cdot\#(F)$でまた$\#(E^F)=\#(E)^{\#(F)}$である，ということも証明できる。

〈練習問題〉　有限集合の有限集合の合併集合は有限である。もしEが有限ならば，$\mathcal{P}(E)$は有限で，しかも$\#(\mathcal{P}(E))=2^{\#(E)}$である。$E$が自然数の空でない有限集合ならば，$E$内のあらゆる$m$に対して$m\leqq k$となるような要素$k$が$E$内に存在する。

註

1. ていねいに言えば「現在の状況」とは‘$m\in n^+$’，であるから，「$m=n$ または $m\in n$」とすべきであろうが，$m=n$ ならば $m^+=n^+$ であるからただちに $m^+\in S(n^+)$ が言えるので，$m\in n$ の場合だけ考えるのである。

2. ここの「推移性」については，前節81頁参照。

3. xRy でかつ yRx ならば $x=y$, といえるような関係 R は反対称的 (antisymmetric) であると呼ばれる。(第1節4頁および次節93頁参照。)

xSy ならば ySx でない, といえる関係 S は非対称的 (asymmetric) と呼ばれる。

なお, ここでの「推移的」は第7節に出てきた関係一般についての推移性で, 前註のかかわる推移性とのわずかな違いについては, 81頁参照。

結局 '$\leqq$' は反対称的で, '$<$' は非対称的である。

4. わかりよい例ではたとえば $n^+=4=\{0,1,2,3\}$ とし, $E=\{2,3\}$ としてみると, $n=3$ で, $n\epsilon E$。また $1\epsilon n$ であるが $1\epsilon' E$。そこで k としては1 (同様にして0でもよい) を選べばよい。

5. 関数の「制限」は今後もしばしば使われる。第8節55頁によって定義を再確認するとよい。

6. E^F は配置集合である。第8節註2を参照のこと。

第14節　順　　序

数学の全域を通じて，そして特に有限集合に適合した計数 (counting) の過程の無限集合への一般化にとって，順序の理論は重要な役割を演ずる。基礎になる定義は単純である。心にとめるべき唯一の事柄は，最初の動機づけが「より小」ではなしに「より小かまたは等しい」というよく知られた性質からきているということである。そのことに対する深遠な理由なんかはない。たまたま「より小かまたは等しい」の一般化の方が頻繁に起り，また代数上の処理に従いやすいだけである。

集合X内での関係Rは，X内のすべてのxとyに対して，xRyとyRxが同時になりたてば $x=y$ である，といえるとき，反対称的 (antisymmetric) であると呼ばれる。集合X内の半順序 (partial order)（あるいは単に順序 (order) ということもある）とは，X内の反射的，反対称的でかつ推移的な関係である。ほとんどの集合でのほとんどの半順序に対してただ1つの記号（あるいは活字のうえでそれに極く似たもの）を使うのが慣例になっている。共通に使われるその記号というのはよく知られた不等号である。そこでX内の半順序はつぎのようなX内の関係$\leqq$であると定義してよかろう。すなわちX内のあらゆるx, yおよびzに対して，(i) $x\leqq x$, (ii) $x\leqq y$ でかつ $y\leqq x$ ならば $x=y$, (iii) $x\leqq y$ でかつ $y\leqq z$ ならば $x\leqq z$, がいえる関係$\leqq$である。「半」という性質規定をする理由は順序に関する問題の中で答えられないまま残りそうなものがあるからである。X内のすべてのxとyに対して $x\leqq y$ であるかまたは $y\leqq x$ である[1]，といえるならば，$\leqq$は

全順序 (total order) (あるいは時としては単純 (simple) または線型 (linear) 順序) と呼ばれる。全順序で順序づけられる集合はしばしば連鎖 (chain) と呼ばれる。

〈練習問題〉 Rおよびその逆関係をふくむ等式を使って，関係Rに対する反対称性と全体性[2] の条件を表現せよ。

半順序の（そして全順序でない）もっとも自然な例は包含関係である。陽表的にいえば，おのおのの集合Xに対して，関係$\subset$はベキ集合$\mathcal{P}(X)$内での半順序である，となる。Xが空であるかまたはXが単集合のとき，かつそのときにかぎってそれは全順序となる。全順序のよく知られた例は自然数の集合での「より小かまたは等しい」という関係である。興味もありまたよく出会う半順序は関数に対する拡張の関係である。陽表的にいうなら，集合XとYが与えられたとき，Fをその定義域がXに包含され，その値域がYに包含されるようなあらゆる関数の集合，とする。そして $\operatorname{dom} f \subset \operatorname{dom} g$ でかつ $\operatorname{dom} f$ 内のあらゆる x に対して $f(x)=g(x)$ の場合に fRg と書いてF内の関係Rを定義すればよい。fRg は言い換えれば，fがgの制限であること，あるいは同値な言い方であるが，gがfの拡張であること，を意味する。F内の関数が結局はデカルト積 $X \times Y$ のある部分集合になることを想い起こせば，fRg が $f \subset g$ と同じ意味であることが認められる。拡張は包含の特殊な場合なのである。

半順序集合 (partially ordered set) とはその中に半順序を一緒にともなう集合のことである。この「一緒にともなう」という語の精確な定式化はつぎのように進められる。半順序集合とは順序対 $(X, \leqq)$ のことであって，ここにXは集合であり，かつ$\leqq$はX内での半順序である。この種の定義は数学ではまったく普通のものであって，数学上の構造はほとんどつねに何か他のある集合とか，関数とか，関係とかを「一緒」にともなう集合なの

である[3]。そのような定義を精確にする仕方として認められているのは，順序対とか3個組あるいは順序つきの何個組でも適当なもの，を引き合いに出すことによるものである。これは唯一の方法というわけではない。たとえば，半順序の知識はその定義域を含意することを見逃さないようにして欲しい。だから，もしわれわれが半順序集合を順序対として記述するとすれば，まったく冗長なことをしているのである。つまり第2座標だけでも同じ量の情報を運べたはずである。しかしながら言語や記号法に関する事柄では伝統がいつでも純粋な理性を征圧する。（ここでは半順序集合が実例となっているが，構造一般に対して）認められる数学的な振舞いは，順序対が正しい進入路であると容認し，第2座標が重要なものだということは忘却し，そしてあたかも第1座標が問題になるすべてであるかのように語ることである。慣例にしたがうために，われわれもほんとうに言いたいのは「Xを半順序の定義域としよう」ということであるのに「Xを半順序集合としよう」といった類いのことを言うことがしばしばあるであろう。同様な言語上の規約が全順序集合，すなわち，順序が実際は全順序であるような半順序集合，にも適用される。

半順序集合の理論は，その専門的な意味があまりにもその日常的な内包に近いためにほとんど他に説明を要しないような語をたくさん使用する。特に，Xが半順序集合で，xとyはXの要素であると仮定する。$x \leqq y$ ならばわれわれは $y \geqq x$ と書く，言い換えれば，$\geqq$は関係$\leqq$の逆である。$x \leqq y$ でかつ $x \neq y$ ならば，われわれは $x < y$ と書き，xはyより小 (less) とかより少 (smaller)，あるいはxはyの前者 (predecessor) であると言う。その代りに，同じ状況下で，われわれは $y > x$ と書き，yはxより大(greater) とかより多 (larger)，あるいはyはxの後者 (successor) であると言う。関係$<$は，(i)いかなる要素xとyに対しても，$x < y$ と $y < x$ は同時にはなりたたない[4]，(ii)$x < y$ かつ $y < z$ ならば，$x < z$ である（すなわち$<$は推

移的である)，といえる関係である。逆に，$<$ がX内の(i)，(ii)を満たす関係で，かつ $x \leqq y$ が，$x<y$ または $x=y$，という意味に定義されるならば，$\leqq$はX内の半順序である。

$\leqq$と$<$との関連は任意の関係に一般化してみることのできるものである。すなわち，集合X内にどのような関係Rが与えられても，xRy であるが $x \neq y$ であるときに xSy と書くというようにして，X内に1つの関係Sを定義することができる。また逆に，X内にどのような関係Sが与えられても，xSy かまたは $x=y$ であるときに xRy と書くというようにして，X内に1つの関係Rを定義することができる。RからSへのまたその逆の移行を縮約して示すために，SはRに対応する厳密な (strict) 関係であると言い，RはSに対応する弱い (weak) 関係であると言うことにしよう。集合X内の関係のことを，それがX内の半順序であるか，さもなければそれに対応する弱い関係が半順序であるときに，それは「Xを半順序で順序づける」と言うことにする。

Xが半順序集合であり，かつ $a \in X$ であるならば，$\{x \in X : x<a\}$ という集合がaによってきまる始切片 (initial segment) で，通例それを $s(a)$ で表わす。集合 $\{x \in X : x \leqq a\}$ はaによってきまる弱い始切片 (weak initial segment) で，$\bar{s}(a)$ で表わす。始切片と弱い始切片の区別を強調することが大切なときには，前の方を厳密な (strict) 始切片と呼ぶ。一般に「厳密な」と「弱い」という語はそれぞれ$<$と$\leqq$を指示する。そこでたとえばaによってきまる始切片はaのあらゆる前者の集合であるというように記述してもよい。あるいは強調した言い方をするにはaのあらゆる厳密な前者 (strict predecessors) の集合と記述すればよい。同様な言い方によって弱い始切片はaのあらゆる弱い前者 (weak predecessors) からなる。$x \leqq y$ でかつ $y \leqq z$ ならば，yはxとzの間に (between) にあると言ってよい。$x<y$ でかつ $y<z$ ならば，yはxとzの厳密に間に (strictly between) あ

る。$x<y$ でかつ x と y の厳密に間にはまったく要素がなければ，x は y の直前者 (immediate predecessor) であると言い，また y は x の直後者 (immediate successor) であると言う。

X が半順序集合（特に全順序がついていてもよい）ならば，X 内のすべての x に対して $a\leqq x$ となるような要素 a が X にある，という場合もあるであろう。その場合に．a は最小 (least)（最少，第一，smallest, first）要素である，と言う。順序の反対称性から，X に最小要素があるならただ１つある，ということがいえる。同様にして，X 内のすべての x に対して $x\leqq a$ となるような要素 a が X にあれば，a は最大 (greatest)（最多，最終，largest, last）要素であって，（それが存在さえすれば）それもまた一意的である。全自然数の集合 ω が（大きさによる通例の順序づけをともなうとして）第一要素（つまり０）はもつが最終要素はもたない半順序集合の例である。同じ集合が今度は逆向きの順序づけでみれば最終要素はもつが第一要素はもたないことになる。半順序集合で最小要素と極小要素との間には重要な違いがある。前と同じく X は半順序集合であるとしたとき，X 内に a よりも厳密に小さい要素がなければ，X の要素 a が X の極小 (minimal) 要素と呼ばれる。同値な表現であるが，$x\leqq a$ ならば $x=a$，といえるとき a は極小なのである。例としては，空でない集合 X の空でない部分集合の集まり $\mathfrak{C}$ で，包含関係による順序をともなうものを考えればよい。おのおのの単集合は $\mathfrak{C}$ の極小要素であるが，（X 自身が単集合でなければ）明らかに $\mathfrak{C}$ は最小要素をもたない。最大要素と極大要素も同様に区別される。X の極大 (maximal) 要素とは，X は a より厳密に大きな要素を含まない，といえるような要素 a のことである。同値な言い換えをすれば，$a\leqq x$ ならば $x=a$ といえるとき，a は極大なのである。

半順序集合の要素 a は，X の部分集合 E 内のすべての要素 x に対して $a\leqq x$ ならば，E の下界 (lower bound) であると言われる。同様にして E 内

のすべての x に対して $x \leqq a$ ならば，a は E の上界 (upper bound) である。集合 E は下界も上界も１つももたないことがあるし，たくさんもっていることもある。またその後の方の場合，そのうちの１つも E に属しないことがあり得る。(例を考えてみよ。) E_* を X 内の E のあらゆる下界の集合とし，また E^* を X 内のあらゆる上界の集合とする。いましがた言ったことは，E_* が空なこともあるとか $E_* \cap E$ が空のこともあるというようなことである。もし $E_* \cap E$ が空でなければ，それは E の最小要素ただ１つからなる単集合である。同じような注意がもちろん E^* にもあてはまる。集合 E_* がたまたま最大要素 a を含んでいるならば（必然的に一意であるが），a は E の最大下界 (greatest lower bound) または下限 (infimum) と呼ばれる。略号 $g.l.b.$ および inf が一般に使用される。発音しにくいしまた $g.l.b.$ とは上（最大）なのか下（下方）なのか憶えることさえ面倒なので，われわれは後の方の記号〔inf〕をもっぱら使うことにしたい。そこで inf E とは，E の１つの下界であり，かつ E のその他すべての下界を領有する[5]（すなわちそれらより大きい）X 内の（たいがいは E に属しない）一意的な要素のことである。他端〔E の上界の方〕での定義は完全に並行して立てられる。E^* が最小要素 a をもてば，a は E の最小上界 ($l.u.b.$) (least upper bound) または上限 (sup) (supremum) と呼ばれる。

半順序集合に関連したいろいろな考想は，表記はし易いが，同化するにはいくらか時間を要する。読者には半順序集合やその部分集合の振舞いの中の様々な可能性を示すような多くの例を作ってみるよう忠告する。そのもくろみで読者の手助けになるように，すすんで面白い性質をもった３つの半順序集合を述べておこう。(i)集合は $\omega \times \omega$ とする。予想される混乱をすべて避けるために，いま導入しようとしている順序を何にも特別なかかわりのない記号 R で示すことにする。(a, b) および (x, y) が自然数の順序対ならば，$(a,b)\ R\ (x,y)$ は，$(2a+1)\cdot 2^y \leqq (2x+1)\cdot 2^b$ を意味するよ

うに定義する。(ここに不等号は自然数の普通の順序づけをさす。) 分数のことは無知だというふりをしたがらない読者ならば，記号法のことは別として，いま定義したのが $\frac{2a+1}{2^b}$ と $\frac{2x+1}{2^y}$ に対する通例の順序である，ということを認められるであろう[6]。(ii)集合は再び $\omega\times\omega$ とする。そしてまた他のものにかかわらない記号，たとえて S，を使用する。(a,b) と (x,y) が自然数の順序対ならば，$(a,b)S(x,y)$ は，a が（普通の意味で）x より厳密に小であるか，さもなければ $a=x$ でかつ $b\leqq y$ を意味するように定義する。辞書中に語を配列する仕方との類似のために，これは $\omega\times\omega$ の<u>辞書式</u> (lexicographical) 順序と呼ばれる。(iii)もう一度集合は $\omega\times\omega$ にとる。今度の順序関係は，たとえて T と書けば，$(a,b)T(x,y)$ が $a\leqq x$ かつ $b\leqq y$ を意味するように定義される。

註

1. すべての（x，y）に対して，xRy または yRx，といえる関係 R は強結合的 (strongly connected) と呼ばれることがある。

2. 前記註1の強結合性のことである。問題のヒントとして，たとえば前節註1にあげた非対称性については，$S\cap S^{-1}=\phi$ というように表現できる。

3. 「構造」についてはブルバキ『数学原論』が構造主義を貫いていることで有名であるが，その厳密な定義はともかく，ここで半順序集合を（X，$\leqq$）と書いたようにして数学上の構造が記号化されることは多い。岩波版『数学辞典』によれば，「構造というのは，順序集合，群，環，線形空間，位相空間，確率空間，多様体など幾多の数学的対象に対し，集合と関係の言葉を用いて統一的な定式化を与えるものである。」というように説明されている。

4. 前節註1参照。

5. 「領有する」の原語は ‘dominate’ であるが，この語は後に第22節147頁で厳密に専門的な意味を負わされる。

6. この順序については後に17節（113頁）でその顕著な性質がとり出される。

第15節　選択公理[1]

半順序集合に関する最深の結果を得るためには新らしい集合論上の道具がいるので，その道具がとり出せるまで順序の理論の展開は中断する[2]。

まず集合が空であるか空でないかを見定めることから始める。そして空でないとすれば，空集合の定義によって，その集合には要素がある。この注意は一般化できる。XとYが集合で，その一方が空ならば，そのデカルト積 $X\times Y$ は空である。XもYも空でないならば，Xには要素xがあり，かつYには要素yがある。そこで，順序対 (x, y) がデカルト積 $X\times Y$ に属し，したがって $X\times Y$ は空でない，ということが出てくる。上記の注意はつぎのような立言の $n=1$ の場合と $n=2$ の場合をなすものである。すなわち，たとえて $\{X_i\}$ がnに属するiに対して集合の有限列であるとすれば，それらのデカルト積が空になる必要十分条件はそれらのうち少なくとも1つが空であることである。この立言はnについての帰納法によって容易に証明できる。($n=0$ の場合は空な関数に関するとりとめもない議論に導くので，それに興味のない読者は0の代りに1から帰納を始めてもよい。)

前段での立言の自明でない部分（必要条件の方）の無限族への一般化がつぎの重要な集合論の原理になる。

選択公理 (axiom of choice) 空でない集合の空でない族のデカルト積は空ではない[3]。

言い換えると，$\{X_i\}$ が空でない集合 I によって添数づけられた空でない集合の族であれば，I 内のおのおのの i に対して $x_i \epsilon X_i$ となるような族 $\{x_i\}$，$i \epsilon I$ が存在する，ということである。

$\mathcal{C}$ を空でない集合の空でない集まりと仮定しよう。$\mathcal{C}$ は1つの族であるとみなされる。あるいはもっと上手に言えば，$\mathcal{C}$ 自身を添数集合の役目に使い，そして $\mathcal{C}$ 上の恒等写像を添数づけの役目に使うだけで，$\mathcal{C}$ を添数づけられた集合に変えることができる[4]。そうすれば選択公理は，$\mathcal{C}$ に属する集合のデカルト積は少なくとも1つの要素をもつ，ということを言っていることになる。そのようなデカルト積の要素は，定義によって，定義域が添数集合（この場合は $\mathcal{C}$）で，おのおのの添数での値がその添数をもつ集合に属するような関数（族，添数集合）である。結論は，定義域を $\mathcal{C}$ とし，$A \epsilon \mathcal{C}$ ならば $f(A) \epsilon A$ であるような関数 f が存在する，ということである。この結論は特に $\mathcal{C}$ が空でない集合 X のあらゆる空でない部分集合の集まりの場合に適用される。その場合の立言は，$\mathcal{P}(X)-\{\varnothing\}$ を定義域とし，A がその定義域に含まれていれば $f(A) \epsilon A$ であるような関数 f が存在する，というようになる。直観的な言語では，その関数 f は多くの集合のおのおのから1つの要素を同時に選択する，いうように述べることができる。それがこの公理の命名理由である[5]。（集合 X の空でない部分集合のおのおのから1つの要素をこの意味で「選ぶ」関数は，X に対する<u>選択関数</u>（choice function）と呼ばれる。）選択を行う集合の集まりが有限ならば，同時選択の可能性は選択公理なんかが立てられる前にわかっていたことからの簡単な帰結である，ということは既にみておいた[6]。この公理の役割はその可能性を無限の場合にも保証することである。

前段にあげた選択公理の帰結（1つは集合のベキ集合に対するもの，もう1つは集合のもっと一般的な集まりに対するもの）は，実はその公理の正確な言い換えなのである。選択公理のおのおのの帰結に対しては，それ

らの証明においてその公理が必要とされる程度を調べてみることが重要だとみなされるのが常であった。選択公理を使わない別証は勝利を意味し,（集合論の残りの公理の示されている前で）その帰結が選択公理と同値であることを示す逆の証明は名誉ある敗北を意味した。その中間にあるものは何でもいまいましいと思われた[7]。一例（そしてまた練習問題の1つ）として，すべての関係は同じ定義域をもつ関数を包含する，という立言をあげておく。もう一例：$\mathfrak{C}$が対をとれば互いに素な空でない集合の集まりなら，$\mathfrak{C}$内のおのおののCに対して$A\cap C$が単集合になるような集合Aが存在する。これらの立言はともに選択公理と同値だと知られている多くの立言の仲間である。

選択公理の用法を例示するものとして，集合が無限ならば，それはωに対等な部分集合をもつ，という立言を考えてみる。非形式的な論証はつぎのように続くであろう。Xが無限集合ならば，それは.別して空ではない（すなわち0に対等ではない），そこで1つの要素たとえてx_0をもつ。Xは1に対等ではないから，集合 $X-\{x_0\}$ は空ではない，そこでそれは1つの要素，たとえて x_1 をもつ。この論証を無限に反復すればよい。たとえば次の段階は，$X-\{x_0, x_1\}$ が空でなくそれゆえそれは1つの要素たとえて x_2 をもつと言うことである。結果はXの相異なる要素の無限列 $\{x_n\}$ になる。q. e. d. 証明のこの素描は少なくともその背後にあるもっとも重要な考想に関して正直であるという美点をもっている。空でない集合から1要素を選択する行為は無限回反復されたのである。選択公理のような類いのことに経験を積んだ数学者はよくこのような非形式的な論証を提示するものである。その経験から一目でどうしてそれを精確にすればよいかが見てとれるからである。われわれの目的にとってはもうすこし遠眼をきかす方がよいであろう。

fをXに対する選択関数としよう。すなわち，fはその定義域内のあら

ゆるAに対して $f(A)\epsilon A$ となるようなXのあらゆる空でない部分集合の集まりからXへの関数である。また，$\mathscr{C}$をXのあらゆる有限部分集合の集まりとしよう。Xは無限であるから，$A\epsilon\mathscr{C}$ならば $X-A$ は空でなく，したがって $X-A$ はfの定義域に属する，ということが出てくる，$\mathscr{C}$から$\mathscr{C}$への関数gを，$g(A)=A\cup\{f(X-A)\}$ と書いて定義する。ふつうの言葉でいえば，$g(A)$ はAにfが $X-A$ から選択する要素を合併することによって得られる，となる。関数gに回帰定理を適用する。たとえば，集合$\varnothing$から始動すればよいであろう。その結果は，$U(0)=\varnothing$ で，かつすべての自然数nに対して $U(n^+)=U(n)\cup\{f(X-U(n))\}$ となるようなωから$\mathscr{C}$の中への関数Uが存在する，ということである。立言：もし$v(n)=f(X-U(n))$ならばvはωからXへの１対１対応であり，したがって事実ωはXのある部分集合（つまりvの値域）と対等である。この立言を証明するために見てとれる一連の初等的な事項をのべるが，それらの証明は定義からた易く導ける。第１：あらゆるnに対して $v(n)\epsilon' U(n)$，第２：あらゆるnに対して $v(n)\epsilon U(n^+)$，第３：nとmが自然数で $n\leqq m$ ならば $U(n)\subset U(m)$，第４：nとmが自然数で$n<m$ならば$v(n)\neq v(m)$（理由：$v(n)\epsilon U(m)$ ではあるが $v(m)\epsilon' U(m)$ であるから。）　最後の事項は，vは相異なる自然数をXの別々の要素の上へと写像するということを含意している。ここで留意しなくてはならないのは，任意の相異なる自然数についてその一方は他方より厳密に小さい，ということだけである。

証明は完結している。いまやすべての無限集合はωに対等な部分集合をもつことがわかったのである。この結果は，ここではその本質的な興味のためというよりむしろ選択公理の適正な用法の例として証明したのではあるが，興味深い系を伴っている。それは，集合はその真部分集合に対等な部分集合をもつならば，かつそのときにかぎり無限である，という立言である。この「ならば」の方は既にわかっている。それは，有限集合はその

真部分集合とは対等になり得ない[8]，ということを述べるだけのものである。「そのときにかぎり」の方を証明するために，Xを無限と仮定し，vをωからXの中への1対1対応としよう。たとえば$x=v(n)$のようにxがvの値域に含まれるならば $h(x)=v(n^{+})$ と書き，xがvの値域に含まれなければ $h(x)=x$ と書くことにする。hがXからそれ自身の中への1対1対応であることは容易に検証できる。hの値域はXの真部分集合である（それは $v(0)$ を含んでいない）から，これで系の証明は完結である。この系の立言はデーデキントによって無限の定義そのものとして使用された。

註

1. 選択公理は公理的集合論でもっとも多くの論議を呼んだ公理で，フレンケルが「選択公理は(連続体仮説とともに)，おそらく，ユークリッドの平行線公理以後数学でもっともおもしろく，もっとも論議された公理である」(Bernays-Fraenkel, [1], p. 16) と言うほどである。そして様々な形の述べ方が用いられ，さらに附帯条件をつけて強い形からかなり弱い形までに工夫をして多くの学者によるその有効性の確認の努力がなされてきた。

　ただ，その論議の中心は，この公理は他の集合論の公理と(i)独立であるか，また(ii)無矛盾であるか，という公理的方法の核心に位置する問題であるので，本書の企画範囲を超えたところで論じられるものである。したがってここでも，(ii)の方はゲーデル (K. Gödel) によって見事に肯定的に解決された（1938年および1940年）こと，(i)は限られた場合の他はまだ完全には解かれていないこと，を記するにとどめ，その詳細はたとえばコーヘン『連続体仮説』などで追跡されればよいであろう，と申し添えるにとどめる。

　なお，この公理は本書では無限公理より後に出てきているが，本来は一般集合論（第11節註8参照）の集合構成公理の1つと考えられるものであることも一言注意しておく。

　この公理は最初（1904年）ツェルメロによって整列可能定理（17節）の証明のために導入されたのであるが，その定理と，その定理で保証された集合での超限帰納法（第17節）の適用の確立とを当面のねらいとしているということは，以後の本文を読み進まれるときにも意識しておかれてよいのであろう。

2. ここに「新らしい道具」といわれるのは超限帰納法(17節)，超限回帰定理(18節) のことで，順序理論は18節122頁から再開される.

3. これはラッセル (1906年) の与えた述べ方で，ツェルメロはもちろん同値であるが後の (101頁)「$f(A) \in A$ であるような関数 f が存在する」という方式で述べた。

なお「選択公理」(Auswahlaxiom) という名はツェルメロが与えたが，ラッセルは「積の公理」(multiplicative axiom) と呼んでいる。(次の註 4 も参照。)

4. 第 9 節61頁参照。

5. この公理がこのように命名されたことについて特に何と異論をとなえても別段どうにもなるまい。しかし実際にこの公理をその選択機能という面を重点にとらえて苦情を呈したひとが初期にはあった (ボレル (E. Borel) など)。事実この公理が保証する選択集合 (あるいは選択関数) は，空でない集合族の空でない要素集合からおのおの 1 つずつの要素を選びとった形になってはいるが，さて一般にどうしてそれを選び出すかという方法については，この公理はほとんど何も教えないに等しい。ツェルメロはボレル等の苦情に対して，この公理は選択機能にかかわるものではなくて，選択集合(あるいは関数)の「存在」ないしその存在の「無矛盾性」を主張するものである，と反論した。おそらくこのツェルメロの答弁をそのまま受けとっておくのが素直な態度であろう。フレンケルはその点で註 2 にあげたラッセルの命名の方を称揚している (Bernays-Fraenkel, [1], p. 15)。

6. 分出公理とベキ集合の公理があればこれは可能であって，本節の初めの方で実際に示されているとおりである。

7. 本節註 1 に示したように，かくしてこの公理をめぐって多くの論議が行なわれてきたのである。

8. これは「ならば」の側に読んだときの対偶命題になっている。

第16節　ツォルンの補助定理[1]

存在定理というのはある集合に所属してかつある性質をもつ対象の存在を立言するものである。基底になる集合が半順序集合で決め手になる性質が最大性であるようにとるにも多くの存在定理が定式化できる（そして必要とあれば再定式化もなされる）。この種の定理のうちでもっとも重要なものを陳述しかつ証明することがわれわれのつぎの目的である。

ツォルンの補助定理 (Zorn's lemma) Xがその中のすべての連鎖が上界をもつような半順序集合ならば，Xは極大要素をもつ。

〈論究〉 連鎖は全順序集合であることを想起してほしい。「X内の」連鎖という語は，それ自身だけから言えるところでは半順序集合とみなされる部分集合だがその実は全順序集合だとわかってくるようなそういうXの部分集合を意味する。もしAがX内の連鎖であれば，ツォルンの補助定理の仮説部はX内でのAに対する上界の存在を保証するものである。しかしそれはA内にAに対する上界が存在することは保証しない。ツォルンの補助定理の結論部は，$a \leqq x$ ならば必然的に $a=x$ となるという性質をもった要素 a がX内に存在する，ということを言うものである。

証明の基本にある考想はわれわれが前に無限集合についての論究で使用したものに類似している[2]。仮説によってXは空ではないから，それはたとえてx_0 という要素をもつ。もし x_0 が極大要素なら，ここで議論を止めればよい。もしそうでなければ，x_0 よりも厳密に大きい要素，たとえて x_1

が存在する。x_1 が極大要素なら，ここで止めればよい。さもなければ続けていく。この論証を無限に反復していけば，結局極大要素に至るにちがいない。

この最後の文がおそらく論証のうちでもっとも確信のもちにくい部分であろう。それは多くの難問の群を秘めている。たとえばつぎのような可能性もあることを見逃すまい。つまり，この論証は無限に反復したとき全体が非極大要素からなる無限列に導く，といったことも起り得ないわけではないであろう。そんな場合にはどうすればよいか。答はそうした無限列の値域はX内の連鎖であり，したがってそれには上界がある，ということである。なすべきことは，その上界から始めて，全論証をすっかりもう一度やり直すことである。もっとも控え目に言っても，ほんとうに正確に何時そしてまたどうなってこの全論証が終りに達するかは不確定である。それは救いようがない。精確な証明を注視するほかない。その証明の構造は最初ツェルメロによって与えられたものである。

〈証明〉　第1段は抽象的な半順序を集合の適切な集まりでの包含の順序で置き換えることである。もっと精確にいえば，X内のおのおのの x に対して，x とあらゆるその前者とからなる弱い始切片 $\bar{s}(x)$ を考えるのである。(Xから$\mathcal{P}(X)$ への）関数 $\bar{s}$ の値域$\mathcal{S}$はXの部分集合のある集まりであるが，それはもちろん包含関係によって（半順序で）順序づけられているとみなしてよい。関数 $\bar{s}$ は1対1であり，また $\bar{s}(x)\subset\bar{s}(y)$ となる必要十分条件は $x\leqq y$ である。このように見てくれば，X内で極大要素を見つける仕事は$\mathcal{S}$内で極大集合を見つける仕事と同じである。X内の連鎖に関する仮説は$\mathcal{S}$内の連鎖に関するそれに対応する言明を含意する（しかも実際は同値である)。

$\mathcal{X}$をX内のあらゆる連鎖の集合としよう。$\mathcal{X}$のすべての要素はX内のどれかある x に対する $\bar{s}(x)$ に包含される。集まり$\mathcal{X}$は，集合の空でない集

まりであり，包含関係による半順序がついており，かつ，$\mathfrak{C}$が$\mathfrak{X}$内の連鎖であれば$\mathfrak{C}$内の集合の合併集合（すなわち$\bigcup_{A\in\mathfrak{C}}A$）は$\mathfrak{X}$に属するといえる。$\mathfrak{X}$内の各集合は$\mathfrak{S}$内のどれかある集合によって領有されている[3]から，$\mathfrak{S}$から$\mathfrak{X}$へ移行してもいかなる新要素も入り込むはずがない。集まり$\mathfrak{X}$をとる1つの利点は連鎖の仮説がとる形のうちすこしでも特殊なものになっていることである。つまり，各連鎖$\mathfrak{C}$は$\mathfrak{S}$内にある上界をもつと言う代りに，$\mathfrak{C}$内の集合の合併集合は，明らかに$\mathfrak{C}$の上界であるが，集まり$\mathfrak{X}$の一要素である，というように陽表的に述べることができるのである。$\mathfrak{X}$のもう1つの技法上の利点は，その中の集合のおのおののあらゆる部分集合を含んでいることであって，そのために，一度に1要素ずつゆっくりと$\mathfrak{X}$内の非極大集合を拡げていくことが可能になるのである。

ここでX内の与えられた半順序のことは忘れてもかまわない。以下ではつぎの2つの条件に従うような空でない集合Xの部分集合の空でない集まり$\mathfrak{X}$を考える。2つの条件とは$\mathfrak{X}$内のおのおのの集合のすべての部分集合は$\mathfrak{X}$に属するということと，$\mathfrak{X}$内の集合の各連鎖の合併集合が$\mathfrak{X}$に属するということである。第1の条件が$\varnothing\in\mathfrak{X}$を含意しているのに注意してほしい。$\mathfrak{X}$内に極大集合が存在するということを証明するのがわれわれの仕事である。

fをXに対する選択関数としよう。すなわち，fはXのあらゆる空でない部分集合の集まりからXへの関数で，fの定義域内のあらゆるAに対して$f(A)\in A$となるものである。$\mathfrak{X}$内の各集合Aに対して，Xの要素xでAと合併すれば$\mathfrak{X}$内の集合をつくるようなものを全部集めた集合を$\hat{A}$としよう。言い換えれば$\hat{A}=\{x\in X : A\cup\{x\}\in\mathfrak{X}\}$である。$\mathfrak{X}$から$\mathfrak{X}$への関数$g$をつぎのように定義する。つまり，$\hat{A}-A\neq\varnothing$ならば$g(A)=A\cup\{f(\hat{A}-A)\}$で，$\hat{A}-A=\varnothing$ならば$g(A)=A$とする。$\hat{A}$の定義から，$A$が極大のとき，かつそのときにかぎり$\hat{A}-A=\varnothing$が出てくる。それゆえ，これらの用語を

使えば，われわれの証明しなくてはならないのは，$g(A)=A$ となるような集合Aが$\mathfrak{X}$内に存在する，ということである。gの決め手になる性質は，$g(A)$（これはいつもAを包含している）がAよりもたかだか1つの要素を余分に含んでいるという事実であることがわかる。

ここで説明を容易にするために仮定義を持ち込む。$\mathfrak{X}$の部分をなす集まり$\mathfrak{T}$は，

(i)　$\varnothing\epsilon\mathfrak{T}$

(ii)　$A\epsilon\mathfrak{T}$ ならば，$g(A)\epsilon\mathfrak{T}$

(iii)　$\mathfrak{C}$が$\mathfrak{T}$内の連鎖ならば，$\bigcup_{A\epsilon\mathfrak{C}}A\epsilon\mathfrak{T}$

ならば，塔 (tower) と呼ぶことにしよう。塔は確かに存在する。集まり全体である$\mathfrak{X}$がそうである。塔の集まりの共通部分はふたたび塔であるから，特に，$\mathfrak{T}_0$ があらゆる塔の共通部分ならば $\mathfrak{T}_0$ は最小の塔であるということが出てくる。当面のわれわれの目的は，塔 $\mathfrak{T}_0$ は連鎖である。と証明することである。

$\mathfrak{T}_0$ 内の集合Cは，$\mathfrak{T}_0$ 内のすべての集合と比較可能であれば，比較可能 (comparable) であると言うことにしよう。それは $A\epsilon\mathfrak{T}_0$ であれば，$A\subset C$ または $C\subset A$ のいずれかである，ということを意味する。$\mathfrak{T}_0$ が連鎖であると言うことは$\mathfrak{T}_0$ 内のあらゆる集合が比較可能だということを意味する。比較可能な集合はたしかに存在する。$\varnothing$がその1つである。つぎの2文段では任意ではあるが仮に固定された比較可能な集合Cに注意を集中していく。

$A\epsilon\mathfrak{T}_0$ でAはCの真部分集合であると仮定する。立言：$g(A)\subset C$。理由は，Cが比較可能であるから，$g(A)\subset C$ であるかCが $g(A)$ の真部分集合であるかいずれかであるが，後の場合にはAが $g(A)$ の真部分集合の真部分集合となり，そしてそのことは $g(A)-A$ が単集合以上のものにはなれないという事実と矛盾することである。

つぎに，$\mathfrak{I}_0$ 内の集合Aで $A\subset C$ か $g(C)\subset A$ のいずれかのいえるもの全部からなる集まり $\mathfrak{U}$ を考えよう。集まり $\mathfrak{U}$ は $g(C)$ と比較可能な $\mathfrak{I}_0$ 内の集合の集まりよりはいくらか小さい。事実，$A\epsilon\mathfrak{U}$ ならば，$C\subset g(C)$ であるから，$A\subset g(C)$ か $g(C)\subset A$ かいずれかである。立言：$\mathfrak{U}$ は塔である。$\varnothing\subset C$ であるから塔についての第１条件は満たされている。第２条件すなわち $A\epsilon\mathfrak{U}$ ならば $g(A)\epsilon\mathfrak{U}$ ということを証明するために，議論を３つに場合分けする。第１：AがCの真部分集合である場合。この場合は前段により $g(A)\subset C$ であり，それゆえ $g(A)\epsilon\mathfrak{U}$である。第２：$A=C$ の場合。この場合は $g(A)=g(C)$，したがって $g(C)\subset g(A)$ であるから，$g(A)\epsilon\mathfrak{U}$ である。第３：$g(C)\subset A$ の場合。この場合は $g(C)\subset g(A)$ となり，それゆえ $g(A)\epsilon\mathfrak{U}$ である。塔についての第３条件すなわち $\mathfrak{U}$ 内の連鎖の合併集合が$\mathfrak{U}$に属するということは，$\mathfrak{U}$の定義から直ちに言える。結論：$\mathfrak{U}$は $\mathfrak{I}_0$ に包含される塔であり，それゆえ $\mathfrak{I}_0$ が最小の塔であるから，$\mathfrak{U}=\mathfrak{I}_0$ である。

以上の考察は，比較可能なおのおのの集合Cに対して，集合 $g(C)$ もまた比較可能である，ということを含意している。理由：Cが与えられたとき，上記のように $\mathfrak{U}$ を作る。$\mathfrak{U}=\mathfrak{I}_0$ という事実は，$A\epsilon\mathfrak{I}_0$ ならば $A\subset C$（この場合は $A\subset g(C)$ である）か $g(C)\subset A$ かのいずれかであることを意味するからである。

これで$\varnothing$が比較可能であること，およびgが比較可能な集合を比較可能な集合の上へと写像することがわかった。比較可能な集合の連鎖の合併集合は比較可能であるから，（$\mathfrak{I}_0$ 内の）比較可能な集合は塔を構成し，したがってそれらの集合は $\mathfrak{I}_0$ をくまなく尽くす，ということが出てくる。そしてそれが $\mathfrak{I}_0$ に関して証明しようとしてきたことである。

$\mathfrak{I}_0$ は連鎖であるから，$\mathfrak{I}_0$ 内のあらゆる集合の合併集合，たとえてAは，それ自身 $\mathfrak{I}_0$ 内の集合である。その合併集合は $\mathfrak{I}_0$ 内のあらゆる集合を包含

するから，$g(A) \subset A$ が出てくる。$A \subset g(A)$ はつねにいえるから，$A = g(A)$ が出てくる。そしてこれでツォルンの補助定理の証明は完結である。

〈練習問題〉 ツォルンの補助定理は選択公理と同値である。（証明のヒント：集合Xを与えて，$\mathrm{dom} f \subset \mathcal{P}(X)$，$\mathrm{ran} f \subset X$ でかつ $\mathrm{dom} f$ 内のあらゆるAに対して $f(A) \in A$ となるような関数fを考えよ。これらの関数を拡張関係で順序づけて，それらのうちで極大なものを見つけるのにツォルンの補助定理を使い，そしてfが極大ならば $\mathrm{dom} f = \mathcal{P}(X) - \{\varnothing\}$ であることを証明せよ。） 以下の各言明を考え，それらもまた選択公理と同値であることを証明せよ。(i)すべての半順序集合は極大連鎖（すなわち，他のいかなる連鎖の真部分集合にもならない連鎖）をもつ。(ii)半順序集合のすべての連鎖はある極大連鎖に包含される。(iii)その中の各連鎖が最小上界をもつような半順序集合はすべて極大要素をもつ。

註

1. これは1935年にツォルン（Zorn）によって導入された定理で，補助定理とか補題とか言われるのは次節に出てくる整列定理の証明に使用されるからのことである。しかし補助定理と呼ばれるからといって内容が乏しいとか証明が手軽だとかいうことはない。事実この節はまるまるこの定理の証明にあてられているし，前節註1にも述べたが，選択公理も整列定理の証明に動機づけられて導入されたのである。そして節末の練習問題を見ればわかるようにツォルンの補助定理は論理的に選択公理と同値なのである。（整列定理とも同値である。）

　さて，選択公理と同値といっても，ツォルンの補助定理は選択集合の存在をいうのでなく，「極大要素」の存在を主張している。このような極大要素の存在に関する定理は1914年のハウスドルフのもの（本節末の練習問題(i)(ii)がそれである）を皮切りにして幾つか証明され，ハウスドルフの極大定理もツォルンの補助定理もともに選択公理と同値であることがわかった。

　そして，選択公理が出て2，30年は整列定理を介しての超限帰納法の活用が公理の主効用として，いろいろ開発されたのであるが，ツォルンの補助定理の登場前後からは，このような公理と同値な極大原理（maximum principles）の

利用が主な風潮になっているようである。

2. 前節102頁参照。

3. 第14節98頁，第22節147頁参照。

第17節　整　　列[1]

半順序集合は最少要素をもたないこともある。またたとえもっていても，その部分集合の中には最少要素をもてないものがある，ということは完全に可能なのである。半順序集合は，そのすべての空でない部分集合が最少要素をもつとき，整列される (well ordered) と（そしてその順序は整列順序 (well ordering) と）呼ばれる。この定義からの１つの帰結で，何らかの例や反例を検討するまでもなく注目すべきは，すべての整列集合は全順序で順序づけられる，ということである。事実 x と y がある整列集合の要素ならば，$\{x, y\}$ はその整列集合の空でない部分集合であり，それゆえ第１要素をもつ。その第１要素が x であるか y であるかにしたがって，$x \leqq y$ か $y \leqq x$ かが得られるわけである。

おのおのの自然数 n に対して，n のあらゆる前者の集合（つまりわれわれの定義による集合 n）は（大きさで順序づけられた）整列集合である。そして同じことが全自然数の集合 ω についても真である。$(2a+1)2^y \leqq (2x+1)2^b$ を意味すると定義される $(a, b) \leqq (x, y)$ という順序をもつ集合 $\omega \times \omega$ は整列ではない。そのことを知る１つの方法は，あらゆる a と b に対して $(a, b+1) \leqq (a, b)$ に注目することである[2]。それから集合 $\omega \times \omega$ の全体は最小要素をもたない，ということが出てくる。$\omega \times \omega$ の部分集合の中には実際最小要素をもつものもある。たとえば，$(1, 1) \leqq (a, b)$ となるようなあらゆる対 (a, b) の集合 E を考えてみればよい。その集合 E には最小要素にあたる $(1, 1)$ があるわけである。注意：それ自身を根拠としては半順

序集合とみなされる集合Eはまだ整列ではない。問題は，たとえEは最小要素をもつとしても，Eの部分集合にはそれのもてないものが多い，というところにある。１例としては，$(a,b)\neq(1,1)$となるようなE内のあらゆる対(a,b)の集合を考えてみればよい。もう１例：$\omega\times\omega$ はその辞書式順序によって整列になる。

整列集合に関してもっとも気持のよい事実の１つは，その要素に関する事柄を数学的帰納法に類似した過程によって証明できる，ということである。精確に言えば，Sを整列集合Xの部分集合であると仮定し，Xの要素xについてその始切片 $s(x)$ がすっかりSに包含されるようであればいつでもx自身Sに属すると仮定しよう。**超限帰納法の原理** (principle of transfinite induction) はこうした状況下では $S=X$ でなくてはならないことを立言する。同値な言い換えをすれば，１つの要素のあらゆる厳密な前者がある集合の中にあればかならずその要素自身もその集合内にある，といえるならば，その集合はすべてを含んでいなくてはならない[3]，ということである。

その証明を検討する前にいくつかの註解を加えておくのが順序であろう。通常の数学的帰納法の原理の言明は超限帰納法のそれと２つの顕著な点で異なっている。１つには，後の方はその前者から各要素へ移行する代りにそのあらゆる前者の集合から各要素へ移行する。２つには，後の場合には出発点となる要素（たとえば０のような）に関する仮定が何もない。第１の差異は重要である。整列集合内の要素は直前者をもてないかもしれないからである。ωにあてはめるときのいまの〔超限帰納法の〕言明が数学的帰納法の原理と同値であることは容易に証明できる。しかしながら，その原理は任意の整列集合にあてはめるときには超限帰納法の原理と同値にはならない。別の言い方をすれば，その２つの言明は一般には互いに同値にならない。ωの場合にそれらが同値になるのは幸運なしかし特例的な状況

なのである。

実例をあげよう。Xをω^+，すなわち $X=\omega\cup\{\omega\}$ とする。ωの要素を通例どおりに順序づけ，またω内のあらゆるnに対して $n<\omega$ であるという要件を加えることによって，X内に順序を定義してみよう。結果は整列集合になる。設問：$0\epsilon S$ でかつ $n\epsilon S$ ならばいつも $n+1\epsilon S$ といえるようなXの真部分集合は存在するか。答：然り。すなわち $S=\omega$ である。

通常の帰納法と超限帰納法の間の第2の差異（後の方に対しては出発点になる要素が要求されない）は概念上というより以上に言語上のものである。もしx_0がXの最少要素ならば $s(x_0)$ は空であり，そして結局は $s(x_0)\subset S$ である。超限帰納法の仮説はそれゆえに x_0 がSに属することを要求するのである。

超限帰納法の原理の証明はほとんど自明である。もし $X-S$ が空でなければ，それは最少要素，たとえてx，をもつ。このことは，始切片 $s(x)$ のすべての要素がSに属すること，したがって帰納法の仮説によって，xがSに属することを含意する。これは矛盾である（xがSと $X-S$ の双方に属することはできない)。そこで結論は結局 $X-S$ は空だということになる。

つぎの3条件をみたすとき整列集合Aは整列集合Bの続き(continuation)であると言うことにしよう。その条件とは，第1に，BがAの部分集合であること，つぎにBが実際Aの始切片であること，そして最後にB内での要素の順序づけがA内でのそれらの順序づけと同じであること，である。そこで，もしXが整列集合であり，またaとbが $b<a$ という関係をもつXの要素であるとすれば，$s(a)$ は $s(b)$ の続きであり，かつもちろんXは $s(a)$ と $s(b)$ 双方の続きである。

$\mathfrak{C}$が整列集合の始切片の任意の集まりであるとすれば，$\mathfrak{C}$は続きという点に関して連鎖になる。このことは，$\mathfrak{C}$がその集まりのどのような2つの

相異なる要素についてもその一方が他方の続きになっているという性質をもった整列集合の集まりであることを意味する。この註記の一種の逆はまた真で，かつ有用なものである。もし整列集合の集まり $\mathfrak{C}$ が続きという点に関して連鎖になるならば，そして U が $\mathfrak{C}$ をなす集合の合併集合であれば，U が集まり $\mathfrak{C}$ 内の（U 自身とは別の）各集合の続きになるような U の整列法がただ一通り存在する。大雑把に言えば，整列集合の連鎖の合併集合は整列される，ということである。この簡約した定式化は，続きという点に関して「連鎖」とはどういう意味かの説明をしていないから危険である。「連鎖」という語の含意する順序づけを単純に順序を保存するだけの包含関係ととれば，結論は妥当ではなくなる[4]。

証明は手近に得られる。もし a と b が U に含まれていれば $\mathfrak{C}$ 内に $a\epsilon A$ でまた $b\epsilon B$ という性質をもつ集合 A と B が存在する。$A=B$ かまたは A と B のうち一方が他方の続きになっているかいずれかであるから，どの場合にも a と b はともに $\mathfrak{C}$ 内のある1つの集合に属する，ということが出てくる。U の順序は，$\mathfrak{C}$ をなす集合で a と b をともに含むものならどの集合においてでも順序づけられるような仕方でおのおのの対 $\{a,b\}$ を順序づけることによって定義される。（U 内に見込まれる順序を定義するまた別の方法は，$\mathfrak{C}$ をなす集合の中で与えられる諸順序が順序対の集合であることを想起し，これら順序対の集合のあらゆるものの合併集合をつくってみることである。）

直接の検証によって，前段で定義された関係が事実1つの順序であること，およびそればかりでなくその造成が一段ごとにそうせざるを得ないものであったこと（すなわち最終の順序が与えられた諸順序によって一意的に決定されること）が示される。結果が現実に1つの整列順序であることの証明も同じく直接にわかる。U の空でない各部分集合は $\mathfrak{C}$ 内のある集合と空でない共通部分をもっていなくてはならない。したがってそれはその

集合内に第1要素をもっていなくてはならない。$\mathcal{C}$が続きの連鎖であるという事実はその第1要素が必然的にUの第1要素でもあるということを含意している。

〈練習問題〉 半順序集合Xの部分集合Aは，Xの各要素xに対して$x \leqq a$となるようなAの要素aが存在すれば，Xにおいて共終（cofinal）である。すべての全順序集合は共終な整列部分集合をもつことを証明せよ。

整列順序の重要さはつぎの結果から派出するのであるが，そこから，他の事柄とともに，超限帰納法の原理は何気なく一見しただけで示せるよりは遙かに広く応用できるものだ，という推論ができる。

整列定理（well-ordering theorem）すべての集合は整列することができる。

〈論究〉 もっとよい（しかし伝統にはそぐわない）言明ではこうなる：おのおのの集合Xに対して，定義域をXとする整列順序がある。警告：整列順序は与えられた集合が既にもっているかもしれぬどんな他の構造ともおよそ如何なる関係をももつ見込みのないものである。たとえば，かりに読者がある半順序あるいは全順序集合についてその順序はきわめてはっきりと整列順序でないと知っているとしても，自分はパラドクスを発見したのだという結論に飛躍してはならないのである。引き出すべき唯一の結論は，集合には多くの仕方で順序づけることのできるものがあり，その仕方の中には整列順序になるものもあればそうでないものもある，ということなのである。そしてわれわれはもう既にそのことは知っていたはずである[5]。

〈証明〉 ツォルンの補助定理を応用する。集合Xを与え，Xのあらゆる整列部分集合の集まり$\mathcal{W}$を考える。陽表的に言えば，$\mathcal{W}$の要素はAの整列順序を一緒にともなうXの部分集合Aである。$\mathcal{W}$には続きによる半順序が

つけられる。

集まり$\mathcal{W}$は空ではない。なぜなら，たとえば$\varnothing\in\mathcal{W}$だからである。もし$X\neq\varnothing$ならばもっと厄介でない$\mathcal{W}$の要素をお目にかけることもできる。$X$のいかなる特定の要素$x$に対しても$\{(x,x)\}$というのがその１つである。$\mathcal{C}$が$\mathcal{W}$内の連鎖であれば，$\mathcal{C}$内の集合の合併集合$U$は$U$を$\mathcal{C}$内の各集合「より大きい」（かあるいは等しい）ようにする一意的な整列順序をもつ，それはまさに前記の続きについての論究でやってのけたことである。それはツォルンの補助定理の主仮説が検証されたことを意味する。結論は，$\mathcal{W}$内に極大整列集合，たとえてMが存在するということである。集合Mは集合X全体に等しくなくてはならない。理由：もしxがM内にないXの要素ならば，MはMのあらゆる要素の後にxを置いて拡大することができる。このあいまいではないが非形式的な叙述の厳格な定式化は読者の練習題に残しておく。そこがきりぬけられれば整列定理の証明は完結である。

〈練習問題〉　全順序集合は各要素の厳密な前者の集合が整列であるとき，かつそのときにかぎって整列であることを証明せよ。そのような条件は半順序集合にもあてはまるか。整列定理は選択公理を含意する（したがってその公理やツォルンの補助定理に同値である）ことを証明せよ。Rが集合X内の半順序であればX内に$R\subset S$となるような全順序が存在すること，言い換えればすべての半順序は定義域を拡大しないで全順序に拡張できることを証明せよ。

註

1. 第15節註１にも述べたように，本節の超限帰納法の原理と整列定理の証明が選択公理導入の主動機であった。そして節末練習問題でわかるように整列定理も選択公理と同値なのである。

2. $\dfrac{2a+1}{2^{b+1}} \leqq \dfrac{2a+1}{2^{b}}$ を見ればよい。 そうすると $(a, b) \geqq (a, b+1) \geqq (a, b+2) \geqq \cdots$ …となっていくから，最少要素はないわけである。

3.「すべてを含む」というのはもちろん「宇宙」の意味ではない。 Xの部分集合として論じはじめたSが，実はX全体，つまり $S=X$ ということである。

4. 続きという関係による順序でないと，どのような順序によっても整列になるとはかぎらないことを言う。続き順序では各部分集合が第1要素を共有するというような特性が単なる順序保存以外にあるわけである。

5. 前註4に対応する本文参照。

第18節　超限回帰

「帰納による定義」の過程には超限の場合でそれに類比するものがある。通常の回帰定理はω上に１つの関数をつくる。その原材料となるのはωをつくる０でない各要素nでの関数値をnに先行する要素での関数値から得る方法である。超限の場合でそれに類比するものはいかなる整列集合Wの上にも１つの関数をつくる。その原材料となるのはWの各要素aでの関数値をaのあらゆる前者での関数値から得る方法である。

結果が簡潔にのべられるようにいくつかの補助概念を導入する。aが整列集合Wの要素であり，またXが任意の集合であるとすれば，<u>X内のaタイプの列</u>（sequence of type a in X）とはW内のaの始切片からXの中への関数の意味とする。ω^+内のaに対するaタイプの列は以前に列と呼んだもの[1]に一致し，$a<\omega$であるか$a=\omega$であるかにしたがって有限または無限である。UがWからXへの関数であれば，aの始切片$s(a)$へのUの制限がW内のおのおののaに対するaタイプの列の１例になる。以下のところでその列は（$U|s(a)$の代りに）U^aで示す方が便利なことがわかるであろう[2]。

<u>X内のWタイプの列関数</u>（sequence function of type W in X）とは，定義域がW内のあらゆる要素aに対するX内のあらゆるaタイプの列からなり，値域がXに包含される関数fのことである。大雑把に言えば，列関数は列を「引きのばす」（“lengthen”）仕方を教えてくれるものである。Wのどれかの要素まで伸びている（ただし包含はしていない）列が与えられれば，

列関数を使ってもう1つ項をくっつけることができるのである。

超限回帰定理 (transfinite recursion theorem) Wが整列集合で，fが集合X内のWタイプの列関数であるとすれば，W内のおのおののaに対して$U(a)=f(U^a)$となるようなWからXの中への関数Uがただ1つある。

〈証明〉 一意性の証明は超限帰納法で容易にできる。存在を証明するために，WからXへの関数とは $W\times X$ のある種の部分集合であることを想起しよう。つまり陽表的に順序対の集合としてUをつくりあげればよいのである。$W\times X$の部分集合Aはつぎの性質をもっていればf-閉である (f-closed) と呼ぼう。その性質とは，$a\epsilon W$ でかつtがAに包含されるaタイプの列であれば (すなわち始切片$s(a)$内のあらゆるcに対して$(c,t(c))\epsilon A$であれば) いつでも$(a,f(t))\epsilon A$となっていることである。$W\times X$自身f-閉であるから，そのような集合は確かに存在する。そこでUをそれら全部の共通部分としてみよう。U自身f-閉であるから，証明すべきこととしてはUが関数であるということが残っているだけである。言い換えれば，証明すべきは，W内のおのおののcに対して$(c,x)\epsilon U$となるようなたかだか1つの要素xがX内に存在することである。(陽表的に言えば，(c,x)と(c,y)がともにUに属すれば$x=y$だ，ということである。) その証明は帰納法による。Wの要素cでたかだか1つのxに対して$(c,x)\epsilon U$が事実真になるようなものをみな集めた集合をSとしよう。$s(a)\subset S$ならば$a\epsilon S$ということを証明すればよいわけである。

$s(a)\subset S$であると言うのは，W内で$c<a$ならば$(c,x)\epsilon U$となるような要素xがX内に一意に存在する，という意味である。それによって定義される対応$c\rightarrow x$はaタイプの列，たとえてt，であり，そして$t\subset U$である。aがSに属していなければ，$f(t)$とは別に$(a,y)\epsilon U$となるようなyが存在する。立言：集合$U-\{(a,y)\}$はf-閉である。これの意味すると

ころは，$b \epsilon W$ でかつ r が $U-\{(a,y)\}$ に包含される b タイプの列であるとすれば $(b, f(r)) \epsilon U-\{(a, y)\}$ となる，ということである。事実 $b=a$ ならば r は（定理の一意性の立言によって）t でなくてはならない。そしてそれを引き去ったあとの集合が $(b, f(r))$ を含む理由は $f(t) \neq y$ である。他方 $b \neq a$ ならば，引き去ったあとの集合が $(b, f(r))$ を含む理由は U が f-閉（かつ $b \neq a$）であることである。これは U が最少の f-閉な集合であるという事実に矛盾するから，$a \epsilon S$ と結論してよい。

超限回帰定理の存在立言の証明はこれで完結である。超限回帰定理の応用は超限帰納による定義（definition by transfinite induction）と呼ばれる。

順序の理論の重要な部分をここでつづけていくが，それはたまたま超限回帰定理がどのように応用できるかを示す実例としても役立つであろう。

２つの半順序集合は（別に全順序集合でもまた整列集合であってさえかまわないが）両者の間に順序を保存する１対１対応が存在すれば相似である（similar）と呼ばれる。もっと陽表的に言えば：半順序集合 X と Y についてそれらが相似である（記号では $X \cong Y$）と言うことの意味は，a と b が X に属するならば（Y 内で）$f(a) \leqq f(b)$ である必要十分条件は（X 内で）$a \leqq b$ となっていることであるといえるような X から Y の上への１対１対応，たとえて f，が存在することである，というようになる。f のような対応は相似写像（similarity）と呼ばれることがある。

〈練習問題〉　相似写像は（定義によって $\leqq$ の保存が要求されるのと同じ意味で）$<$ を保存すること，そして実際１つの半順序集合をもう１つの半順序集合の上へと写像する１対１の関数は，それが $<$ を保存するときかつそのときにかぎって相似写像になること，を証明せよ。

半順序集合 X 上の恒等写像は X から X の上への相似写像である。X と Y が半順序集合で f が X から Y の上への相似写像ならば，（f は１対１であ

るから）YからXの上への一義的に決定される逆関数f^{-1}が存在してそのf^{-1}は相似写像である。のみならず，gをYから半順序集合Zの上への相似写像とすれば，合成関数 gf はXからZの上への相似写像である。これらの註解から，もし何かある半順序集合Eに注意を制限し，したがってEの部分集合を定義域とする半順序だけを考察するとすれば，相似写像はそこで得られる半順序集合の集合での同値関係となる，ということが出てくる。同じことは，なお一層視野を狭めて定義域がEに包含されるような整列順序だけを考えても，真である。つまり，相似写像はそこで得られる整列集合の集合での同値関係になるのである。われわれは相似写像を完全に一般化して半順序集合に対して定義しておいたのであるが，そしてその主題はそのレベルで研究できるのであるが，以下のところでの関心は整列集合に対する相似写像だけになるであろう。

1つの整列集合がその真部分集合と相似になることは容易に可能である。たとえば全自然数の集合と全偶数の集合とを考えてみればよい。（いつものように，自然数mはある自然数nが存在して $m=2n$ となるようなら偶数である，と定義される。写像$n\to 2n$が全自然数の集合から全偶数の集合の上への相似写像である。）しかしながらある整列集合のそれ自身の一部分との相似写像はまったく特殊な写像である。fが実際ある整列集合Xのそれ自身の中への相似写像であれば，X内のおのおののaに対して，$a\leqq f(a)$ である。その証明は整列順序の定義に密着している。$f(b)<b$ となるような要素bが存在していれば，それらのうちに最小なものがある。bがその最小要素のとき $a<b$ ならば，$a\leqq f(a)$ である。特に $a=f(b)$ のときは$f(b)\leqq f(f(b))$ が出てくる。しかしながら $f(b)<b$ であるから，fの順序保存という特性からすれば $f(f(b))<f(b)$ でなくてはならない。この矛盾からの逃げ道は$f(b)<b$となることは不可能だと認めることしかない。

前段の結果は３つの特別有用な帰結をともなう。その第１は，２つの整列集合，たとえてXとY，がおよそ相似であるのならば，その間にはまさに１つだけの相似写像がある，という事実である。事実gとhがともにXからYの上への相似写像だと仮定して，$f=g^{-1}h$ と書くことにしてみよう。fはXのそれ自身の上への相似写像であるから，X内のおのおのの a に対して $a \leqq f(a)$ ということが出てくる。これはX内のおのおのの a に対して $a \leqq g^{-1}(h(a))$ であることを意味する。そこへgをあてがえばX内のおのおのの a に対して $g(a) \leqq h(a)$ が推論される[3]。この状況はgとhの場合に対称であるから，X内のおのおのの a に対して $h(a) \leqq g(a)$ もまた推論できる。結論は $g=h$ である。

第２の帰結は，整列集合は決してその始切片の１つと相似になることはない，という事実である。事実Xが整列集合で，aがXの要素，そしてfがXから $s(a)$ の上への相似写像であるとすれば，特に $f(a) \in s(a)$ となるから $f(a) < a$ であるが，それは不可能なことである。

第３のそして主たる帰結は，整列集合に対する比較可能性定理[4]である。その立言は，XとYが整列集合ならば，XとYは相似であるかまたはいずれか一方が他方の１つの始切片に相似である，ということである。ただ練習のために証明に超限回帰定理を使うことにするが，それを避けることはまったく容易である。XとYは空でない整列集合でそのいずれも他方の始切片には相似でないと仮定し，この状況ではXはYに相似でなくてはならないということの証明に進む。$a \in X$ とし，t はY内の a タイプの列，言い換えれば t は $s(a)$ からYの中への関数であるとする。$f(t)$ をもしあるのならY内の t の値域の真正な上界のうち最小のものにとり，その反対の場合にはYの最小の要素にとる。超限回帰定理の語法でいえば，そうして決定される関数fはY内のXタイプの列関数である。Uは超限回帰定理をこの状況と結合させるような関数とする。やさしい（超限帰納法による）

論証で，X内のおのおののzに対して関数UはX内のaによって決定される始切片をY内の$U(a)$によって決定される始切片の上へと1対1に写像する，ということが示せる。これはUが相似写像であることを含意しており，これで証明は完結である。

超限回帰定理を使わない別証の素描も示しておく。Xの要素aで，それに対して$s(a)$が$s(b)$に相似になるようなYの要素bが存在するようなものの集合をX_0とする。X_0内のおのおののaに対して，Y内のbを対応させるような（一意にきまる）対応づけを$U(a)$と書き，Uの値域をY_0とする。$X_0=X$かさもなければX_0がXの始切片でかつ$Y_0=Y$，ということが出てくる。

〈練習問題〉　整列集合Xの各部分集合はXかまたはXの始切片に相似である。XとYが整列集合でかつ$X \cong Y$（すなわちXはYに相似）ならば，その相似関係はXの各部分集合の（もしあればであるが）最小上界をその部分集合の像の最小上界の上へと写像する。

註

1. 第11節78頁参照。
2. $\{U \mid s(a)\}$という語号法については第8節56頁参照。
3. 「gをあてがう」というのは，$a \leqq g^{-1}(h(a))$から，両辺のgによる関数値をとって$g(a) \leqq g(g^{-1}(h(a)))$を導くことで，第10節67頁の定理により$g(g^{-1}(B))=B$であるから，$g(a) \leqq h(a)$が得られる。
4. この比較可能性定理というのも選択公理と同値になることが証明されている。なお後の第20節134頁，第22節149頁のような言い換えもなされる。

第19節　順　序　数

集合xの後者x^+は$x\cup\{x\}$であると定義された。そしてそうすればωは，0を含みかつxを含むかぎりつねにx^+も含むような集合のうち最小のもの，として構成された[1]。もしωから出発して，その後者ω^+をつくり，さらにその後者をつくり，というようにして限りなく進んでいけばどんなことが起るであろうか。言い換えれば，そこで，ωが0，1，2，……等々を超えているのと同じ意味で，$\omega, \omega^+, (\omega^+)^+$，……等々を超えたものが何か出てくるであろうか。

この問は，たとえてTという，ωを含みまた（ω自身以外の）Tの各要素はωからくり返し後者をつくっていくことで得られるような，1つの集合を求めている。この要件をもっと精確に定式化するためにすこしばかりの特殊な仮の語法を導入する。定義域が何かある自然数nの厳密な前者の集合(言い換えれば$\mathrm{dom}\, f=n$）である関数fを，($n\neq 0$ したがって$0<n$として）$f(0)=\omega$でかつ$m^+<n$のときはいつも$f(m^+)=(f(m))^+$となるならば，ω-後者関数（ω-successor function）ということにしよう。数学的帰納法によるやさしい証明で，おのおのの自然数nに対してnを定義域にもつω-後者関数が一意に存在することが示せる。何かがあってωに等しいかまたはωからくり返して後者をつくることによって得られる，と言うのは，それが何かあるω-後者関数の値域に所属する，ということを意味する。$S(n, x)$を「nは自然数で，xはnを定義域にもつω-後者関数の値域に所属する」ということを言明する文であるとしよう。$S(n, x)$が真に

なるようなnが存在するとき，かつそのときにかぎって $x \epsilon T$ といえるような集合 T がわれわれの求めているものである。そのような集合は ω が0を超えているのと同じほど遙かに ω を超えている。

各自然数 n に対して集合 $\{x : S(n, x)\}$ をつくることが許されるのがわかった。言い換えれば，各自然数 n に対して，$S(n, x)$ が真ならば，かつそのときにかぎり $x \epsilon F(n)$ といえるような集合 $F(n)$，が存在するのである。n と $F(n)$ との間の結びつきは大そう関数に似ているように見える。しかしながら，われわれがこれまでに見てきた集合の構成法はどれでも，$x \epsilon F(n)$ ならばかつそのときにかぎって $(n, x) \epsilon F$ といえるような順序対の集合 F の存在を証明するに足るほど強力なものではないこともわかる。そこでこの明らかに望ましい事態に達するためには，もう1つの（われわれには最後の）集合論の原理が必要である。この新原理は，大雑把に言って，知的なことで1つの集合の要素にたいしてできることならどんなことでも集合をつくり出す，ということを述べるものである。

置換の公理 (axiom of substitution) $S(a, b)$ がある集合 A 内のおのおのの a に対して集合 $\{b : S(a, b)\}$ をつくることができるというような文ならば，定義域が A で A 内のおのおのの a に対して $F(a) = \{b : S(a, b)\}$ といえるような関数 F が存在する[2]。

もちろん，$\{b : S(a, b)\}$ がつくれると述べることは，$S(a, b)$ が真ならばかつそのときにかぎり $b \epsilon F(a)$ といえるような集合 $F(a)$ が存在する，という意味である。外延性公理が，置換の公理で記述されている関数は与えられた文と与えられた集合によって一意に決定される，ということを含意する。この公理の名前の理由は，在来の集合の各要素に対して何か新しい要素を置換することによって，在来のものから新らしい集合をつくることができるようにするところにある[3]。

置換の公理の主な応用は自然数を遙かに超えて数えるという過程を拡げていく際にみられる。現在の見地からすれば，自然数の決定的な性質は各要素によって決定される始切片がその要素に等しいような整列集合だということである。（mとnが自然数ならば $m<n$ は $m\epsilon n$ を意味するのを想起してほしい。それは $\{m\epsilon\omega: m<n\}=n$ を含意する。）これが数えるという過程の拡大の基底になる性質である。こうした考想の圏内での基本定義はフォン・ノイマン (von Neumann) によるものである。順序数 (ordinal number) とはα内のあらゆるξに対して $s(\xi)=\xi$ といえるような整列集合αである，というように定義づけられるのである。ここに $s(\xi)$ は以前同様に始切片 $\{\eta\epsilon\alpha:\eta<\xi\}$ である[4]。

自然数でない順序数の１例は全自然数からなる集合ωである。ということはこれでもはや以前に数えられたより先が「数え」られていることを意味する。以前は意のままになる数だけがωの要素であったのに反して，いまやω自身が入ってきているのである。ωの後者 ω^+ もえられる。この集合は明白な仕方で順序づけられており，しかもその明白な順序づけは順序数に課された条件をみたす整列順序になっている。事実，もし $\xi\epsilon\omega^+$ ならば，後者の定義によって，$\xi\epsilon\omega$ であるか（この場合には $s(\xi)=\xi$ であることは既知）さもなければ$\xi=\omega$（この場合には順序の定義によって $s(\xi)=\omega$，したがってやはり $s(\xi)=\xi$）である。いま示した論証はまったく一般的なもので，αが順序数ならば α^+ もそうである，ということを証明している。われわれの数えるという過程はいまやωを包含し，ω^+ そして $(\omega^+)^+$ と続けて無限にまで拡がっている，ということがいえる。

この点で，ωを超えて何が起るかという始めの議論との接触をはかろう。置換の公理から容易に，$F(0)=\omega$ でおのおのの自然数nに対して $F(n^+)=(F(n))^+$ となるようなω上の関数Fが一意に存在する，ということがいえる。この関数の値域がわれわれの関心する集合であるが，もっとずっと重

要だといえる集合は，集合ωと関数Fの値域との合併集合である。少なくとも順序数の算術を一瞥するまではっきりしない理由によるのであるが，その合併集合は通例 $\omega 2$ で示される。なおまた順序数算術の記号法を借りて，$F(n)$ のことを $\omega+n$ と書くことにすれば，その集合 $\omega 2$ は，あらゆる n（nはωに含まれる）とあらゆる $\omega+n$（nはωに含まれる）とからなる集合，というように記述できる。

$\omega 2$ が１つの順序数であることを検証するのはもはや容易である。もちろんその検証は $\omega 2$ 内の順序の定義にかかっている。この時点でその定義と証明はともに練習問題に残しておいて，本論としては $\omega 2$ に関する事実をその簡単な特例として含むような一般的な所見のいくつかに注意を向けていく。

集合X内の（半または全）順序はその始切片によって一意に決定される。言い換えれば，RとSがX内の順序であり，またX内のおのおののxに対して，xのあららゆるR–前者の集合がxのあらゆるS–前者の集合と同じであれば，RとSは同じなのである。この立言は前者を厳密な前者の意味にとろうがとるまいが明白である。特記すれば，この立言は整列集合にあてはまる。この特例から，およそある集合をそれが１つの順序数になるように整列させることが可能なら，そのための方法はただ１つある，と推論される。集合を１つの順序たらしめる関係が何でなくてはならないかはその集合だけが知らせてくれるのであって，その関係が要件をみたせばその集合は順序数であり，それ以外の場合は順序数ではない。$s(\xi)=\xi$ と言明する意味は，ξのあらゆる前者がちょうどξの全要素をなす，ということである。だから問題の関係は単に所属の関係にすぎない。$\eta<\xi$ が，ξとηが集合αの要素であるときはいつも $\eta\epsilon\xi$ であることを意味する，というように定義されるならば，その結果はα内のおのおののξに対して $s(\xi)=\xi$ といえるようなαの整列順序になるかならないかのいずれかである。

そして先の場合αは順序数であるが. 後の場合はそうではない。

順序数についてのここでの予備的な議論を順序数の最初の方のいくつかの名をあげることでしめくくっておく。0，1，2，……の後にはωが，そして $\omega, \omega+1, \omega+2, \cdots$の後には $\omega 2$ がくる。$\omega 2+1$（つまり $\omega 2$ の後者）の後には $\omega 2+2$ それから $\omega 2+3$ がきて，こうして始まる列全部の直後に $\omega 3$ がくる。$\omega 3+1, \omega 3+2, \omega 3+3, \cdots$がつぎにきて，それらの後に $\omega 4$ がくる。このようにしてつぎつぎ $\omega, \omega 2, \omega 3, \omega 4, \cdots$が得られる。置換の公理をあてはめると，自然数に$\omega$が続いてくるのと同じ意味で，それら〔$\omega, \omega 2, \omega 3, \cdots$〕に続くものが何かつくり出される。その何かが ω^2 である。その ω^2 の後は，全部もう一度始め直しになる。つまり，$\omega^2+1, \omega^2+2, \cdots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1$, $\omega^2+\omega+2, \cdots$, $\omega^2+\omega 2$, $\omega^2+\omega 2+1, \cdots$, $\omega^2+\omega 3, \cdots$, $\omega^2+\omega 4, \cdots$, $\omega^2 2, \cdots$, $\omega^2 3, \cdots$, $\omega^3, \cdots$, $\omega^4, \cdots$, $\omega^\omega, \cdots$, $\omega^{(\omega^\omega)}, \cdots$, $\omega^{(\omega^{(\omega^\omega)})}, \cdots$ というようになる。これらすべての後にくるものは ε_0 で，それから ε_0+1, $\varepsilon_0+2, \cdots$, $\varepsilon_0+\omega, \cdots$, $\varepsilon_0+\omega 2, \cdots$, $\varepsilon_0+\omega^2, \cdots$, $\varepsilon_0+\omega^\omega, \cdots$, $\varepsilon_0 2, \cdots$, $\varepsilon_0\omega, \cdots$, $\varepsilon_0\omega^\omega, \cdots$, ${\varepsilon_0}^2, \cdots$ となっていくのである。

註

1. 第11節77頁参照。

2. この公理は原文のままの名では「代入の公理」であるが，論理的に同値関係のなりたつものを随時相互に置換する (replace) ことと，そのような関係の成立にかかわらず任意のものをただし一貫して代入する (substitute) こととを区別するなら，この公理の効果は前の方の置換にあたる。そこでこの訳書では現代の多くの集合論の著作に従って「置換の公理」の名をとった。

この公理をツェルメロの公理系に最初に付加したのはフレンケル (1921/22) であった（そしてかれは「代入の公理」と呼んだ）が，それとは独立にスコーレム (1922/23) やフォン・ノイマン (1923) も同等な公理を採択した。

フレンケルによれば (Bernays-Fraenkel〔1〕, p. 22)，任意の無限集合（たとえばω）を含み，さらに自身の含むおのおのの部分集合の巾（べき）集合をも含むよ

うな集合Pは，無限の公理をも加えた既出の公理だけからは得られない，というところからこの公理が要請されるのである。そして順序数および超限帰納法の一般理論もこの公理で保証される。それは本節本文の説明でもわかるとおりである。

ところでこの公理は分出公理と同様に開放文 '$S(a, b)$' を含むことから，1つの公理というよりは「公理型」と称すべきものである（第2節，訳註3参照）。そして粗い言い方をすれば，本文では「知的なことで1つの集合の要素にたいしてできることならどんなことでも集合をつくり出す」となっているが，「関数Fの定義域が集合であるならその値域も集合になる」と言い換えてもよい (Bernays-Fraenkel〔1〕, p. 22; Fraenkel-Bar=Hillel-Levy〔1〕, p. 51)。あるいは「集合A内のすべてのaにたいして $S(a, b)$ となるようなbがたかだか1つ存在する，というような関数としての性質をもった文 $S(a, b)$ があるなら，bの集合が存在すると言ってよく，またAをその新集合で「置換」してもよい」というようにも言える (Suppes,〔1〕, p. 202)。

このように述べれば，置換の公理が分出公理の役をも果すのではないか，と推量されるであろう。事実，分出公理は置換の公理から導出できるし，さらに置換の公理と巾(べキ)の公理を併せて使えば対の公理も導出できることが知られている。だから公理の独立性をやかましくいうなら，**ZF** の公理の中に置換の公理を入れれば分出公理と対の公理は不要ということになる。しかし，置換の公理が十全な形で働く前に集合論の入口の段階で簡単な集合を構成するという教育的な配慮からは，その両公理とも捨てないのが得策とされる。

なお本書ではこれで，外延性，分出，対，合併集合，巾(べキ)集合，無限，選択，置換という8公理を採りあげたことになり，これ以上の公理は使われないが，公理的集合論を展開するには置換の公理を入れてきた段階でさらに集合といえるものを制限しないとまたパラドクスに陥ることが知られている。その1つは異常集合 (extraordinary set) と呼ばれるものが出てくることで，ミリマノフ (Mirimanoff) がツェルメロの体系についてすでに1917年に指摘したのであるが，$a_1 \in a$，$a_2 \in a_1$，$a_3 \in a_2$，……と無限に退行する集合aが考えられるわけである。このような異常集合を防ぐためにノイマン (1925) は**底打ちの公理** (Axiom der Fundierung) というのを導入した。（もっともスコーレムが既に独立に1923年に使っていたことも知られている。ベルナイス (1941) は**制限公理** (restrictive axiom) とか**基礎打ちの公理** (axiom of grounding) とか称している）。日本語ではスッピースなどとともに異常集合を排除した結果を見て

の名で**正則性の公理** (axiom of regularity) と呼ぶことが多いようであるが，それは大雑把にいうと，

空でない集合Aには，Aの要素xでもはやAとは共通部分をもたないものが存在する。

ということを主張するものである。ただしこの公理はパラドクス回避には役立つものの，実質的な集合論の展開には余り登場しない。したがって『素朴集合論』としての本書では除外されているのであろう。

3. たとえば，集合ωの各要素0，1，2，……にそれぞれω，ω^+，$(\omega^+)^+$，……を置換していけば集合Tが得られる，というわけである。

4. ノイマン流でない順序数の導入としては，カントールに始まる順序型(order type, Ordnungstypus) による進入路などがあるが，それについてはたとえばワイルダー〔1〕，161頁以下にわかりよい解説が見られる。

第20節　順序数の集合

定義によれば順序数は整列集合の特種なものである。その特種な性質を調べていこう。

もっとも初歩的な事実は，順序数αの各要素は同時にαの部分集合になっている，ということである。（言い換えれば，すべての順序数は推移的集合[1]である。）実際，$\xi\epsilon\alpha$ ならば，$s(\xi)=\xi$ という事実はξの各要素がα内のξの前者であり，したがってなによりもαの要素である，ということを含意している。

ξが1つの順序数αの要素ならば，いまも見てきたとおり，ξはαの部分集合であり，したがってξは（αからうけついだ順序に関して）整列集合となる。立言：ξは実際に1つの順序数である。事実，$\eta\epsilon\xi$ ならば，ξ内のηによって決定する始切片はα内のηによって決定する始切片と同じである。この後の方〔の始切片〕はηに等しいのであるから，先の方のもそうである。同じ結果をもう1つ別に定式化する仕方は，順序数のすべての始切片は順序数である，と言明することである。

つぎに注意すべきことは，もし2つの順序数が相似ならばそれらは等しい，ということである。そのことを証明するために，αとβが順序数で，fはαからβの上への相似写像であると仮定しよう。示すべきは，α内のおのおののξに対して $f(\xi)=\xi$，ということである。証明は超限帰納法によればすぐである。$S=\{\xi\epsilon\alpha : f(\xi)=\xi\}$ と書くことにする。α内のおのおののξに対して，$s(\xi)$ に属しないαの最小要素はξ自身である。fは相

似写像であるから，fによる $s(\xi)$ の像に属しないβの最小要素は $f(\xi)$ だ，ということが出てくる。これらの立言から，$s(\xi)\subset S$ ならば $f(\xi)$ と ξは同じ始切片をもつ順序数であり，したがって $f(\xi)=\xi$ がいえる。こうして $s(\xi)\subset S$ のときはいつも $\xi\epsilon S$ ということが証明できた。そこで超限帰納法の原理から $S=\alpha$ がいえて，それから $\alpha=\beta$ が出てくる。

αとβが順序数なら，それらはなによりも整列集合であり，したがって，両者が相似であるか，さもなければ一方が他方の１つの始切片に相似である。もし，たとえて，βがαの１つの始切片に相似であれば，βはαの１つの要素に相似なわけである。αのすべての要素は順序数であるから，βはαの要素である，あるいはもう少し言い換えればαはβの続き[2] である，ということが出てくる。これまでのところで，αとβが別々の順序数ならば，

$\beta\,\epsilon\,\alpha$,

$\beta\subset\alpha$,

αはβの続きである，

の３つの文は互いに同値であることがわかった。もしそれらがなりたてば，

$\beta<\alpha$

と書いてもよい。いま証明してきたことは，どんな２つの順序数も比較可能だということ，すなわち，αとβが順序数ならば，$\beta=\alpha$ か $\beta<\alpha$ かまたは $\alpha<\beta$ だ，ということである[3]。

前段の結論は，順序数のすべての集合には全順序がつけられる，と言って表現できる。ところが実際上はもう少し多くのことが真である。つまり順序数のすべての集合は整列なのである。事実，Eは順序数の空でない集合であると仮定し，αをEの要素としてみる。E内のあらゆるβに対して $\alpha\leqq\beta$ ならば，αがEの第１要素で万事よろしい。そうでない場合には，$\beta<\alpha$ すなわち $\beta\epsilon\alpha$ となるような要素βがE内に存在する。言い換えれ

ば $\alpha\cap E$ は空ではない。α は整列集合であるから，$\alpha\cap E$ には第１要素，たとえて α_0，がある。もし $\beta\epsilon E$ ならば，$\alpha\leqq\beta$ か（この場合 $\alpha_0<\beta$）または $\beta<\alpha$ か（この場合 $\beta\ \epsilon\ \alpha\cap E$ で，それゆえ $\alpha_0\leqq\beta$）である。そしてそのことは E に最小要素つまり α_0 があることを示している。

順序数のうちには有限なものもある。それはまさしく自然数（すなわち ω の要素）である。他は超限 (transfinite) であると呼ばれ，あらゆる自然数の集合 ω は最小の超限順序数である。（０以外の）おのおのの有限順序数にはその直前者がある。超限順序数 α に直前者 β があれば，自然数に対するのとちょうど同じように，$\alpha=\beta^+$ である。すべての超限順序数に直前者があるわけではない。直前者をもたない超限順序数は極限〔順序〕数 (limit number) と呼ばれる。

さて $\mathcal{C}$ を順序数の集まりと仮定する。ちょっと前に見ておいたように，$\mathcal{C}$ は続きの連鎖であるから，$\mathcal{C}$ をつくる集合の合併集合 α は，$\mathcal{C}$ 内の α とは別なすべての ξ に対して α が ξ の続きとなるような整列集合である。α 内の要素によって決定される始切片は，$\mathcal{C}$ をつくるどの集合に現われるにしても，その要素によって決定される始切片と同一である。このことは α が順序数であるということを含意している。もし $\xi\epsilon\mathcal{C}$ ならば $\xi\leqq\alpha$ であり，数 α は $\mathcal{C}$ の各要素の上界である。β を $\mathcal{C}$ のもう１つの上界とすれば，$\xi\epsilon\mathcal{C}$ であるかぎりいつも $\xi\subset\beta$ であり，それゆえ合併集合の定義によって $\alpha\subset\beta$ である。そうすれば α は $\mathcal{C}$ の最小上界であるといえるので，これで順序数のすべての集合には上限がある，ということを証明したことになる。

正確に全順序数だけからなるような集合はあるであろうか。答が否定でなくてはならないのは見やすいことである。そんな集合があるくらいなら，あらゆる順序数の上限をつくることもできるはずである。その上限はすべての順序数より大きいか等しい順序数であろう。しかしながら，おのおの

の順序数に対して，それより厳密に大きい数（たとえばその後者）が存在するのであるから，そんなことは不可能である。あらゆる順序数の「集合」について語ることは意味をなさない。そのような集合があると仮定することにもとづく矛盾はブラリ・フォルティのパラドクス（Burali-Forti paradox）（ブラリ・フォルティというのは１人であって２人の人ではない）と呼ばれている[4]。

つぎの目標は，順序数の概念がそう見えかねないほど特別なものではないこと，そして，実際上各整列集合が何かある順序数と本質的な点で類似していること，を示すことである。ここで「類似性」は相似という専門的な意味で使われている。結果の非形式的な言明は，おのおのの整列集合は可算である，となる。

計数定理 (counting theorem) おのおのの整列集合はただ１つの順序数に相似である[5]。

〈証明〉 順序数にとって相似は相等と同じであるから，一意性の方は明白である。さて，Xは整列集合で，Xの要素aは，aのおのおのの前者によって決定される始切片が（一意にでなくてはならないが）何かある順序数と相似になっている，と仮定しよう。$S(x,\alpha)$ が「αは順序数であって $s(x)\cong\alpha$」ということを述べる文ならば，$s(a)$ 内のおのおのの x に対して集合 $\{\alpha : S(x,\alpha)\}$ をつくることができる。実際上その集合は単集合である。置換の公理から，ちょうどaの各前者によって決定される始切片に相似な順序数だけからなる集合が存在する，といえる。そこでaがその前者のうちの１つの直後者であろうがそれら全部の上限であろうが，$s(a)$ は１つの順序数に相似だ，ということが出てくる。以上の論証で超限帰納法の原理の適用に道がひらける。結論は，X内のおのおのの始切片が相似になるような順序数がある，ということである。この事実が今度は，上で

したのとまったく同様に，もう一度置換の公理を応用することを正当化してくれる。その最終結論が，求めたとおり，Xに相似な順序数がある，なのである。

註

1. 第12節81頁参照。
2. 第17節115頁参照。
3. この言明は比較可能性定理の順序数での表現とみてよい。第18節註 4 参照。
4. このパラドクスについては「訳者あとがき」を参照。
5. この定理は numeration theorem とも呼ばれ，選択公理と同値な多くの言明の 1 つである。第16節註 1，第18節註 4 など参照。

第21節　順序数算術

自然数に対しては算術上の演算を定義するのに回帰定理が使われた。そしてそれにつれて，それらの演算がさまざまの望ましい仕方で集合論上の演算に関係づけられること，を証明した。たとえばそうして，2つの互いに素な有限集合EとFの合併集合に含まれる要素の数は$\#(E)+\#(F)$に等しいことがわかるのである。さて，この事実を加法の定義に使ってもよかったことを見ておこう。mとnが自然数ならば，それらの和を，$\#(E)=m$で$\#(F)=n$になるような互いに素な集合EとFをみつけること，そして$m+n=\#(E\cup F)$と書くこと，によって定義できたはずなのである。

自然数に対してやったこととやってよかったはずのこととに対応して，順序数の算術にも2つの標準的な進入路がある。一方では変化をもたせるために，また一方ではこの文脈では回帰法の方が不自然にみえるために，われわれは回帰法による進入路の代りに集合論によるものの方を重視していきたい。

2つの整列集合を併置して新たな整列集合をつくる多少とも明白な仕方を指摘することから始める。非形式的に言えば，その考想は一方を書きあげてから他方を続けるということなのである。もしこのことを厳格に言おうとしてみれば，2つの集合は互いに素でないかもしれないという困難にたちまち逢着してしまう。一体どうなればわれわれは2つの集合に共通な要素を書きとめたと考えてよいのであろうか。この困難からの逃げ道は集合を互いに素にすることである。それにはそれぞれの集合の要素を色別に

塗り分ければよい。もうすこし数学らしいことばで言えば，各集合の要素を，その要素と何か識別用の対象とを一緒にしたものと置換せよ，ただしその際2つの集合には2つの相異なる対象を使うこと，というようになる。完全に数学的なことばでは，EとFを任意の集合としたとき，$\hat{E}$をEに属するxを使ったあらゆる順序対$(x,0)$の集合とし，$\hat{F}$をFに属するxを使ったあらゆる順序対$(x,1)$の集合とせよ，ということになる。集合$\hat{E}$と$\hat{F}$は明らかに互いに素になる。Eと$\hat{E}$の間には$(x\to(x,0))$，そしてもう1つのFと$\hat{F}$の間にも$(x\to(x,1))$という明白な1対1対応がある。これらの対応を使って，EとFがたとえどんな構造（たとえば順序）をもっていようが，それを$\hat{E}$と$\hat{F}$へ移しだすことができる。そこで，2つの集合が与えられれば，それに附随した構造があろうがなかろうが，どんなときでも同じ構造をもった互いに素な集合で置換することができる，ということが出てくる。そしてそのことから，すこしも一般性を失わないで，何はともあれそれらは互いに素である，と仮定することができるのである。

この構成法を順序数の算術に応用する前にそれが任意の集合族に一般化できることを見ておく。事実，$\{E_i\}$を集合族とすれば，E_iに属するxを使ってできるあらゆる順序対(x,i)の集合のことを$\hat{E}_i$と書けばよい。（言い換えれば$\hat{E}_i=E_i\times\{i\}$である。）集合族$\{\hat{E}_i\}$は対をとれば互いに素で，しかも，もとの集合族$\{E_i\}$がやれたことならなんでもできるのである。

さて，EとFは互いに素な整列集合であると考えよう。Eに属する要素の対が，そしてまたFに属する要素の対も，それらのもっていた順序をたもち，かつEの各要素がFの各要素に先行するように，$E\cup F$内に順序を定義してみる。（形式外れの言語でいえば，RとSをそれぞれEおよびF内で与えられた順序関係としたとき，$E\cup F$に$R\cup S\cup(E\times F)$による順序をつけよ，というようになる。）EとFが整列集合であるという事実から，$E\cup F$も整列であるということがいえる。この整列集合$E\cup F$は整列集合

EとFとの順序和 (ordinal sum) であると呼ばれる。

簡単でしかも大切な仕方でこの順序和の概念を無限に多くの被加項に拡張する方法がある。$\{E_i\}$ を整列集合Iを添数集合とする互いに素な整列集合族とする。この族の順序和はつぎのように順序づけられた合併集合 $\bigcup_i E_i$ のことである。aとbがこの族の要素で $a\epsilon E_i$, $b\epsilon E_j$ とすれば，$a<b$ は，$i<j$ であるか，さもなければ $i=j$ でかつ E_i に与えられた順序でaがbに先行する，ということを意味する。

こうなれば順序数に対する加法の定義はもう児戯にひとしい。おのおのの整列集合Xに対して，$\mathrm{ord}\,X$ をXに相似な一意的な順序数とする。（もしXが有限ならば，$\mathrm{ord}\,X$ は以前に定義された自然数$\#(X)$ と同じである。）αとβが順序数のとき，AとBは互いに素な整列集合で $\mathrm{ord}A=\alpha$, $\mathrm{ord}B=\beta$ とし，CをAとBの順序和としてみる。和 (sum) $\alpha+\beta$ とは，定義によって，Cの順序数のことである，したがって $\mathrm{ord}\,A+\mathrm{ord}\,B=\mathrm{ord}\,C$ である，とすればよい。和 $\alpha+\beta$ が集合AとBの特定の選び方には無縁だということは注意すべき重要な点である。同じ順序数をもつものなら他にどんな互いに素な集合の対をとっても同じ結果が得られたはずだからである。

これらの考察を無限の場合に拡張するには何の困難もない。$\{\alpha_i\}$ が整列集合Iを添数集合とする順序数の整列族であるなら，$\{A_i\}$ をおのおののiに対して $\mathrm{ord}\,A_i=\alpha_i$ となる互いに素な整列集合の族とし，Aを族 $\{A_i\}$ の順序和とすればよい。和 $\sum_{i\epsilon I}\mathrm{ord}\,A_i$ とは，定義によって，順序数Aのことであり，したがって $\sum_{i\epsilon I}\mathrm{ord}\,A_i=\mathrm{ord}\,A$ である，というようになる。ここでもまた最終結果は整列集合 A_i の任意の選び方に無縁である。他にどんな選び方をしても（同じ順序数をもつものなら）同じ和が得られたはずである。

順序数に対する加法の性質のなかにはうまくいくものもあるが，だめな

ものもある。台帳のうちうまくいっている側には,

$$\alpha+0=\alpha,$$

$$0+\alpha=\alpha,$$

$$\alpha+1=\alpha^{+},$$

などの等式や，結合律

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$$

などがある。同じようにあっぱれなのは，$\beta=\alpha+\gamma$ となるような0以外の順序数 γ があるとき，かつそのときにかぎって $\alpha<\beta$ である，という事実である。これらの立言の証明はみな初等的なものである。

この加法のだめな振舞いのほとんどは交換律が不成立になることから派生する。例：$1+\omega=\omega$（ところがすぐ上でみた〔$\alpha+1=\alpha^{+}$〕ように，$\omega+1\neq\omega$ である。）加法のこの不届きは順序に関するある直観的に明らかな事実の表明なのである。たとえば，（ω タイプの）無限列の前に新たな要素をくっつければ，その結果は始めのものと明らかに相似であるが，代りに終りにその要素をくっつければ，もう相似関係は崩れている。前の集合には最終要素がないのに新らしい集合にはそれがあるからである。

無限和の主用途は積の研究を動機づけ，またそれを容易にすることである。A と B が整列集合ならば，その積は A をそれ自身に B 回加えた結果である，といううように定義するのが自然である。それが意味をなすようにするためには，何はともあれ，それぞれが A に相似で B を添数集合とするような互いに素な整列集合の族をつくりあげなくてはならない。そういうことをやるためのあの一般的な指図[2] がここではうまくはたらく。つまり必要なのは B 内のおのおのの b に対して $A_b=A\times\{b\}$ と書くことだけである。ここで集合族 $\{A_b\}$ にあてはめた順序和の定義をしらべてみれば，つぎのように定式化される定義に導かれる。2つの整列集合 A と B との<u>順序積</u> (ordinal product) とは 逆辞書式順序[3]でのデカルト積 $A\times B$ のことで

ある。言い換えれば，(a,b) と (c,d) が $A\times B$ に所属するなら，$(a,b)<(c,d)$ ということは，$b<d$ であるか，さもなければ $b=d$ でかつ $a<c$，ということを意味するわけである[4]。

α と β が順序数のとき，A と B を $\mathrm{ord}\,A=\alpha$ で $\mathrm{ord}\,B=\beta$ となっているような整列集合とし，C は A と B の順序積であるとしよう。<u>積</u> (product) $\alpha\beta$ とは，定義によって，C の順序数のことであり，したがって $(\mathrm{ord}\,A)\cdot(\mathrm{ord}\,B)=(\mathrm{ord}\,C)$ である。この積は整列集合の任意の選択には無縁に一義的に定義されている。その代りに，順序数 α をもつもっとも使いやすい整列集合は順序数 α 自身である（そして β に対しても同様）ということを想起すれば，この点でおよそどんな任意性をも避けることができたであろう。

加法のように，乗法にもうまくいく性質とだめなのとがある。うまくいくもののなかには，

$$\alpha 0=0,$$
$$0\alpha=0,$$
$$\alpha 1=\alpha,$$
$$1\alpha=\alpha$$

などの等式があり，結合律

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma,$$

そして左分配律

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,$$

および，もし2つの順序数の積が0ならばその因数の1つは0でなくてはならない，という事実，なども含まれる。（乗法について加法より優先して行なうという標準の規約が使われているのに注意してほしい。$\alpha\beta+\alpha\gamma$ は，$(\alpha\beta)+(\alpha\gamma)$ を示すのである。）

乗法に対する交換律は成立せず，それからの多くの帰結もそうである。だから，たとえば，$2\omega=\omega$ である（順序対の無限列を考えればよい）が，

$\omega 2 \neq \omega$（無限列の順序対を考えればよい）である。右分配律もまた成立しない。すなわち$(\alpha+\beta)\gamma$は一般には$\alpha\gamma+\beta\gamma$とは異なる。例：$(1+1)\omega=2\omega=\omega$であるが$1\omega+1\omega=\omega+\omega=\omega 2$である。

繰り返し加法が順序積の定義に導いたのとちょうど同じように，繰り返し乗法をやれば順序指数の定義に使えるはずである。しかしその代りに指数づけには超限回帰法を経て入っていくこともできる。精確で詳細なことは順序数の広大で高度に専門的な理論の一部になっている。ここでは定義のヒントを与えることと，そのもっとも簡単な帰結を指示することで満足しておくことにする。α^β(ここにαおよびβは順序数である)を定義するために，(βについての)超限帰納による定義を使用する。$\alpha^0=1$でかつ$\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\alpha$と書くことから始めて，$\beta$が極限数ならば$\alpha^\beta$は，$\gamma<\beta$としておいて，$\alpha^\gamma$の形の数のうちの上限である，というように定義すればよい。定義のこの素描を注意深く定式化すれば，つぎのような式が出てくる。

$$0^\alpha=0\quad(\alpha\geqq 1),$$

$$1^\gamma=1,$$

$$\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\alpha^\gamma,$$

$$\alpha^{\beta\gamma}=(\alpha^\beta)^\gamma$$

指数についてのよく知られた法則がみななりたつわけではない。そこで，たとえば，$(\alpha\beta)^\gamma$は一般には$\alpha^\gamma\beta^\gamma$とは異なる。例：$(2\cdot 2)^\omega=4^\omega=\omega$であるが，$2^\omega\cdot 2^\omega=\omega\cdot\omega=\omega^2$である。

警告：この節および以下での順序数に対する指数記号は以前に使ってきた用法と整合しない。ωから2へのあらゆる関数の非順序集合2^ωと，順序数の列2，$2\cdot 2$，$2\cdot 2\cdot 2$等々の最小上界である整列集合2^ωとは，全然同じものではない。しかしそれはどうにもならない。数学上の用法がどちらの陣営でもしっかりと確立しているのである。個別的な状況で，文脈から2つのうちどちらの解釈が使われているかはっきりわからないようなとき

は，それをはっきりさせることば書きをつけなくてはならない。

註

1. 列のタイプについては第18節120頁参照。
2. 本節始め（139頁）で，Eに$\hat{E}$を置換した手法を指している。
3. 辞書式順序については第14節99頁参照。
4. （a，b），（c，d）が複素数をあらわすとしたとき，複素数には普通の大小による順序はつけられないが，この逆辞書式順序による順序が与えられることがある。ただその際に実数の場合のようにアルキメデスの公理は適用できないことがわかるので，この順序の用途は限られたものとなる。つまり，A，Bが正の実数で$A<B$ならば，$nA<B$ となるような正整数 n が存在するのであるが，$\alpha=a$（実数），$\beta=c+di$（c，dは実数で $d>0$；i は虚数単位）とすれば，逆辞書式順序では $\alpha<\beta$ であるのに n をいかに選んでも $n\alpha>\beta$ とすることはできないのである。

第22節　シュレーダー・ベルンシュタインの定理

数えることの目的は1つの集合の規模を他の集合のと比較することである。集合の要素を数えるのにもっともよく知られた方法はそれらの要素を何かある適切な順序に整頓することである。順序数の理論はその方法を巧妙に抽象化したものであるが，少しばかりその目的の達成には不足がある。と言ったからといって順序数が無用などと言うつもりはない。順序数の主な用途はほかに，たとえば位相数学で説明用の例や反例の源泉として使われるところに，あることはすぐわかるのである。以下でわれわれは順序数に若干の注意を払い続けるが，順序数が舞台の中央を占めることはなくなるであろう。（実際は全然順序数なんかなしでも済ませることを知っておくのは無価値ではない。基数の理論は順序数の助けを借りても借りなくても構成できるのである。どちらの構成にも利点はある[1]。）以上の本筋を外れた前置きをしておいて，集合の規模を比較する問題に向かおう。

問題は，それぞれの要素がお互いに何のかかわりもないように見える集合の規模を比較することである。パリによりもフランスに多くの人がいる，と決めるのはまったく容易である。しかしながら，秒ではかった宇宙の年齢とパリの電子数とを比較するのはほんとうにそうた易くはない。数学上の例として，補助集合Aを使って定義されたつぎの集合の対を考えてみよう。(i)$X=A$ と $Y=A^+$；(ii)$X=\mathcal{P}(A)$ と $Y=2^A$；(iii)XはAをそれ自身に写すあらゆる1対1写像の集合で，YはAのあらゆる有限部分集合。おのおのの場合に2つの集合XとYのうちどちらが多くの要素をもっているか

と問うことができよう。問題は，まず問の厳格な解釈を見出し，それからその問に答えることである。

整列定理はすべての集合が整列化できることを教えている。また整列集合に対しては規模の妥当な測度と思えるもの，すなわちその順序数がある。これら2つの所見から問題は解けるのであろうか。XとYの規模を比較するために，われわれはただそのおのおのを整列化してから $\mathrm{ord}\,X$ と $\mathrm{ord}\,Y$ をくらべるだけでよいであろうか。答はきわめて強い調子のノーである。難点は同一の集合が多くの仕方で整列化されることである。具体的な例として全自然数の集合ωを考えてみよう。0を他のすべての要素の後に置くことによって新順序を持ち込んでみればよい。（言い換えれば，nとmが0でない自然数ならばそれらを通例の順に配列するが，$n=0$ で $m\neq 0$ ならばmをnより前におくのである。）その結果はωの1つの整列順序であるのに，この整列の順序数は $\omega+1$ となる。

XとYが整列集合ならば $\mathrm{ord}\,X<\mathrm{ord}\,Y$ となる必要十分条件はXがYの1つの始切片と相似になることである。そこで，順序数については何も知らないとしても，2つの整列集合の順序規模(ordinal size)は比較できるはずだ，ということがでてくる。そのとき知っておく必要があると思われるのは相似の概念だけである。相似は順序集合に対して定義されたのであった。任意の非順序集合に対する中心概念は対等の概念である。（2つの集合XとYはその間に1対1対応が存在すれば対等 $X\sim Y$ と呼ばれる，ということを思い起してほしい[2]。）相似を対等で置き換えれば，前段でほのめかしておいたのに似たことが使えるようになる。要点は，規模を比較するというだけなら，規模とは何かということは必ずしも知らなくてはならないわけではない，ということである。

XとYが，XがYの1つの部分集合と対等であるような集合ならば，

$$X\precsim Y$$

と書くことにしよう。この記号は仮のものであって，永続的に固定した名をつけるにはあたらない。しかしながら，それが使われ続けているかぎりでは，それに言及する仕方はある方が便利である。妥当と思われるのは，YがXを領有する（dominate）と言ってみることである。ある集合Eの部分集合の順序対(X, Y)で$X \precsim Y$となるものの集合はEのベキ集合内での関係を構成する。この記号の形がそれの指示する概念のもつ性質のいくつかを間違いなくほのめかしてくれる。この記号の形は半順序を思い出させるから，そして半順序は反射的，反対称的，推移的であるから，領有も同様な性質をもつと期待してよいようである。

反射性と推移性には何の困難も生じない。おのおのの集合Xはそれ自身の１つの部分集合（すなわちX）に対等であるから，あらゆるXに対して$X \precsim X$が出てくる。fがXとYの１つの部分集合との間の１対１対応であり，またgがYとZの１つの部分集合との間の１対１対応であるならば，gをfの値域に制限し，その結果をfと複合させてもよい。結論は，XはZの１つの部分集合と対等だということである。言い換えれば，$X \precsim Y$で$Y \precsim Z$ならば$X \precsim Z$である。

面白い問は反対称性についてのものである。$X \precsim Y$で$Y \precsim X$ならば$X = Y$と結論することができるであろうか。それは不合理である。その仮定はXとYが対等であればいつでも満たされる。ところが対等な集合は同一でなくてはならないわけはないからである。それでは，２つの集合についてわれわれの知っていることといえばそのお互いが相手の１つの部分集合と対等だということだけであるとき，何を言うことができるであろうか。答はつぎの名高いしかも重要な結果に含まれている。

シュレーダー・ベルンシュタインの定理（Schröder-Bernstein theorem）
$X \precsim Y$でかつ$Y \precsim X$ならば$X \sim Y$である。

〈註記〉 この逆は，たまたま反射性の立言をかなり強化したものになるのであるが，領有の定義からすぐ出てくる。

〈証明〉 fをXからYの中への1対1写像であるとし，gをYからXの中への1対1写像であるとしよう。問題はXとYの間の1対1対応を構成することである。XとYには共通要素はないと仮定する方が便利である。そうでないときもごく容易にそうであるようにすることができるから[3]，この附加仮定には一般性の喪失は少しも含まれない。

X内の要素xはY内の要素$f(x)$の親（parent）であると言い，同様に，Y内の要素yはX内の$g(y)$の親であると言うことにしよう。Xのおのおのの要素xは子孫（descendants）の無限列，すなわち，$f(x)$，$g(f(x))$，$f(g(f(x)))\cdots$をもつ。この定義は，その列内の各項がそれに先行するあらゆる項の子孫である，ということを含意している。また，その列中の各項は後続するあらゆる項の先祖（ancestor）であるとも言うことにしよう。

おのおのの要素（XかまたはY内の）に対して，3つの事柄のうち1つが起らなくてはならない。もしその要素の先祖関係をできるかぎり遠くまで辿り続ければ，最後にはXの要素で親のないもの（これら孤児たちは正確にいえば$X-g(Y)$の要素である）に到着するか，Yの要素で親のないもの（$Y-f(X)$）に最後に到着するか，または系図が無限に溯っているかである。X_XをXの要素でX内に起源をもつものの集合（すなわちX_Xは$X-g(Y)$の要素とそのX内のあらゆる子孫を一緒にしたものからなる）とし，X_YをXの要素でY内に起源をもつものの集合（すなわちX_Yは$Y-f(X)$の要素のX内でのあらゆる子孫からなる）とし，そしてX_∞をXの要素で親なし先祖をもたない〔つまりどこまでも先祖がたどれる〕ものの集合としよう。Yの分割も同様に3つの集合Y_X，Y_YおよびY_∞となる。

$x\in X_X$ならば$f(x)\in Y_X$であり，実際，fのX_Xへの制限はX_XとY_Xとの間の1対1対応である。$x\in X_Y$ならば，xは逆関数g^{-1}の定義域に所属

して $g^{-1}(x)\epsilon Y_Y$ である。実際，g^{-1} の X_Y への制限は X_Y と Y_Y との間の1対1対応である。最後に $x\epsilon X_\infty$ ならば $f(x)\epsilon Y_\infty$ であり，f の X_∞ への制限は X_∞ と Y_∞ との間の1対1対応である。別な見方をすれば，$x\epsilon X_\infty$ ならば $g^{-1}(x)\epsilon Y_\infty$ で，g^{-1} の X_∞ への制限が X_∞ と Y_∞ との間の1対1対応になる。これら3つの1対1対応をつなぎ合せれば，X と Y との間の1対1対応が得られる。

〈練習問題〉　f が X から Y の中への写像で，g が Y から X の中への写像であると仮定する。$f(A)=B$ かつ $g(Y-B)=X-A$ となるような X と Y それぞれの部分集合 A と B が存在することを証明せよ。この結果は，シュレーダー・ベルンシュタインの定理の上記のものとまったく違うように見える証明を与えるのに使うことができる。

これまでのところで領有が半順序の本質的な性質をもっていることがわかった。その順序が実際は全順序であることを見ることで，この序論なみの論議をしめくくっておく。その立言というのは集合に対する比較可能性定理の名で知られているものである[4]。それは，X と Y が集合ならば $X\precsim Y$ かまたは $Y\precsim X$ である，と述べられる。その証明は整列定理と整列集合に対する比較可能性定理から直ちに出てくる。X と Y をともに整列化し，そうして得られた整列集合は〔互いに〕相似であるか，またはその一方が他方の始切片の1つに相似である，という事実を使えばよい。前の場合には X と Y は対等であり，後の場合は一方が他方の部分集合と対等である。

註

1. カントール以来濃度（power，Mächtigkeit）の概念を使って順序数より先に基数（計数）を規定するコースもよくとられる。本書のように順序数を先に定義すれば，基数の方は後の第25節164頁にあるように定義されるが，集合の

規模に対する測度として基数を先に定義するときには，1879年にフレーゲが提唱し，それと知らずに1901年にラッセルがまた提案したと言われる定義から出発するのが普通である。それは「集合Sの基数とはSと濃度の等しい（対等な）あらゆる集合の集合のことである」という趣旨のものである。スッピース（Suppes〔1〕）も先に基数をとりあげているが，「基数のフレーゲ・ラッセル定義はその単純さの点で美しい」と称賛している（上掲書 p. 109）。しかし「等濃度のあらゆる集合の集合」は本書第25節にも述べられているしラッセル自身も指摘する自己矛盾的な概念であって，構成的な **ZF** にはそのような集合は入ってこない。あるいはスッピースは「その展開は直観的（素朴）集合論ではまったく綺麗であるが，公理論の枠内では基数集合は空集合というより他はない」とも言っている（同上書 p. 110）。こういう次第で論理的に難の少ない道の１つが順序数によって基数を定義することなのであるが，**ZF** 内で基数を順序数より先に扱う方法も確かにある。スッピースがやったように基数を（無定義）基本用語の１つにとって特別な基数公理を立てる仕方や，特別な公理は立てないで集合をランク分けしてかかる方法などが考えられる。それらについてはスッピースの上掲書やワイルダー〔1〕，114頁以下，特に143頁以下を参考にされればよいと思う。

2. 第13節89頁参照。

3. 前節139頁参照。

4. 第18節124頁およびそこの訳註４参照。

第23節　可 算 集 合

XとYが，YがXを領有しかつXがYを領有する，といえるような集合ならば，シュレーダー・ベルンシュタインの定理があてはまり，そして，XはYと対等である，と言われる。YはXを領有するがXはYを領有しないとすれば，したがってXはYと対等ではないとすれば

$$X \prec Y$$

と書くことにしよう。そしてYはXを厳密に領有する (strictly dominate) と言うことにする。領有と厳密な領有は有限および無限集合に関するいくつかの事実を簡明な形で表現するのに使うことができる。集合Xはそれと対等な自然数があれば有限であると呼ばれ，さもなければ無限である，ということを思い起してほしい[1]。$X \precsim Y$でかつYが有限ならばXも有限であることは既知であり，ωが無限であることもわかっている (§13)。なおまた，Xが無限ならば$\omega \precsim X$ということもわかった (§15)。この最後の立言の逆は真であって，直接に（有限集合はその真部分集合と対等にはなれないという事実を使って），あるいはシュレーダー・ベルンシュタインの定理の応用として，証明することができる。（もし$\omega \prec X$ならば，$X \sim n$となるような自然数nが存在することは不可能である。なんとなれば，そうすれば$\omega \precsim n$とすべきであるのに，それはωが無限であるという事実に矛盾するからである。）

われわれはたった今，集合Xは$\omega \precsim X$のとき，かつそのときにかぎって無限である，ということを見てきた。つぎには，Xは$X \prec \omega$のとき，かつ

そのときにかぎって有限である，ということを証明してみよう。その証明は厳密な領有〔関係〕の推移性による。すなわち，$X \precsim Y$かつ$Y \precsim Z$で，しかもその領有関係のうち少なくとも1つが厳密な領有であるとすれば，$X \prec Z$である。事実，$X \precsim Z$は明らかである。もし$Z \precsim X$ならば，$Y \precsim X$でかつ$Z \precsim Y$とすべきであり，そのことから，（シュレーダー・ベルンシュタインの定理によって）$X \sim Y$でかつ$Y \sim Z$となるが，それは〔少なくとも一方は〕厳密な領有であるとの仮定に矛盾する。さてXが有限ならば，ある自然数nが存在して$X \sim n$である。そして，ωは無限であるから$n \prec \omega$，したがって$X \prec \omega$である。逆に$X \prec \omega$ならばXは有限でなくてはならない。というのは，さもなければ$\omega \precsim X$としなくてはならず，それから$\omega \prec \omega$が出てきて，それは不合理だからである。

集合Xは，$X \precsim \omega$ならば可算（あるいは可附番）(countable *or* denumerable）と呼ばれ，$X \sim \omega$ならば可算無限（countably infinite）と呼ばれる。明らかに，可算集合は有限かまたは可算無限である。このすぐ後に続く行論での主な目的は，可算集合の上に施された多くの集合論上の構築がまた可算集合に導くのを示すことである。

ωのすべての部分集合が可算であるのを見とどけることから始めて，おのおのの可算集合のすべての部分集合が可算であることの演繹へと進む。これらの事実は自明ではあるが有用である。

fがωから集合Xの上への関数ならば，Xは可算である。その証明のために，X内のおのおののxに対して集合$f^{-1}(\{x\})$は空ではないことを見逃さないようにしよう（ここが上へのというfの特性の重要になるところである），するとその帰結として，X内のおのおののxに対して，$f(g(x))=x$となるような自然数$g(x)$が見つかることになる。関数gはXからωの中への1対1写像であるから，そのことは$X \precsim \omega$を示している。そうした事柄を気にかける読者ならば，この証明が選択公理を利用したことに気

付かれたのではなかろうか。そしてその人は，その公理によらない別証があることを知りたいと思われることであろう。（それはある。）これと同じ註釈のあてはまるところがこの節および後続の 2 節でも他に数箇所あるのであるが，いちいち指摘することはひかえておこう。

前段から，集合 X は何かある可算集合から X の上への関数が存在するとき，かつそのときにかぎって可算である，ということが出てくる。それと緊密に関係しているのがつぎの結論である：Y が何でも特定の可算無限集合であるならば，空でない集合 X を可算とする必要十分条件は Y から X の上への関数が存在することである。

$n \to 2n$ という写像は ω とあらゆる偶数の集合 A との間の 1 対 1 対応であるから，A は可算無限である。このことは，X が可算集合ならば A を X の上へと写像する関数が存在する，ということを含意している。同様にして，$n \to 2n+1$ は ω とあらゆる奇数の集合 B との間の 1 対 1 対応であるから，もし Y が可算集合ならば B を Y の上へと写像する関数が存在する，ということが出てくる。A 上の f とも B 上の g とも合致する関数 h は（すなわち，$x \epsilon A$ なら $h(x)=f(x)$ で，$x \epsilon B$ なら $h(x)=g(x)$ ならば）ω を $X \cup Y$ の上へと写像する。結論：2 つの可算集合の合併集合は可算である。これから簡単な数学的帰納法による論証にもとづいて，可算集合の有限集合の合併集合は可算である，ということが証明できる。2 つの集合に対してはたらいた細工を模倣することで同じ結果が得られるのである。その方法の基底になるのは，0 でないおのおのの自然数 n に対して，対をとれば互いに素でその合併集合は ω に等しくなるような ω の無限部分集合の族 $\{A_i\}$ $(i<n)$ が存在する，という事実である。

同じ方法がなおその先の証明にも使える。立言：対をとれば互いに素でその合併集合が ω に等しくなるような ω の無限部分集合の族 $\{A_n\}$ $(n<\omega)$ が存在する。これを証明する 1 つの方法は，ω の要素を対角線上に〔右上

から左下へ〕数え下りていくつぎのような配列に書いていくことである。

0　1　3　6　10 15…

2　4　7　11 16…

5　8　12 17…

9　13 18…

14 19…

20…

…

そしてそれからこの配列の横の行を考えることである。もう1つの方法は，A_0 を0と奇数からなるとし，A_1 を A_0 の0でない各要素を2倍して得られる集合として，帰納的に，A_{n+1} は $n \geqq 1$ に対して A_n の各要素を2倍して得られる集合とすることである。どちらの方法でも（そしてまだ他にも多くの方法があるが）その仔細な点は簡単にうめていくことができる。結論：可算集合の可算無限族の合併集合は可算である。証明：可算集合の族 $\{X_n\}(n \epsilon \omega)$ が与えられれば，おのおのの n に対して関数 f_n が A_n を X_n の上へと写像するといえるような関数族 $\{f_n\}$ を見出し，$k \epsilon A_n$ ならばいつでも ω から $\bigcup_n X_n$ の上への関数 f を $f(k)=f_n(k)$ と書いて定義することにする。前段の結果をこの結果と結び合わせれば，可算集合の可算集合の合併集合はつねに可算である，ということが導びける。

興味ありかつ有用な系としては，2つの可算集合のデカルト積もまた可算である，というのがある。

$$X \times Y = \bigcup_{y \epsilon Y} (X \times \{y\})$$

であるから，また X が可算であれば Y 内のおのおののきまった y に対して集合 $X \times \{y\}$ は明らかに可算である（1対1対応 $x \to (x, y)$ を使えばよい）から，結果は前段から出てくる。

〈練習問題〉 可算集合のあらゆる有限部分集合の集合は可算であることを証明せよ。全順序集合Xのすべての可算部分集合が整列ならば，X自身が整列であることを証明せよ。

以上の論議にもとづけば，すべての集合が可算であると推測してみるのも理にかなわないわけではないと思われるのではなかろうか。つぎにすすんでそうでないことを示す。この否定的な結果が基数の理論を面白くするものなのである。

カントールの定理 (Cantor's theorem) すべての集合はそのベキ集合によって厳密に領有される。あるいは言い換えれば，あらゆるXに対して

$$X \prec \mathcal{P}(X)$$

である。

〈証明〉 Xから$\mathcal{P}(X)$の中へは自然な1対1写像，すなわちXの各要素に単集合$\{x\}$を結びつけたもの，がある。この写像の存在は $x \precsim \mathcal{P}(X)$ を証明するものであるから，残っているのは，Xが$\mathcal{P}(X)$と対等でないことの証明である。

fがXから$\mathcal{P}(X)$の上への1対1写像であると仮定すれば，目的はこの仮定が矛盾に導くのを示すことである。$A=\{x\epsilon X: x\epsilon' f(x)\}$ と書いてみる。ことば書きでいえば，AはXの要素のうち対応する集合に含まれないものからなる，というようになる。$A\epsilon\mathcal{P}(X)$ で，fはXを$\mathcal{P}(X)$ の上へと写像するから，X内に $f(a)=A$ となるような要素aが存在する。その要素aは集合Aに属するか属しないかいずれかである。もし $a\epsilon A$ ならば，Aの定義によって $a\epsilon' f(a)$ としなくてはならないが，$f(a)=A$ であるからそれは不可能である。これで矛盾が出てきたのでカントールの定理の証明は完結である。

$\mathcal{P}(X)$ はつねに 2^X と対等である（ここに 2^X はXから 2 の中へのあらゆる関数の集合である）から，カントールの定理はあらゆるXに対して $X \prec 2^X$を含意している。特にωにXの役割をさせるようにとれば，自然数のあらゆる集合の集合は非可算 (uncountable) である（すなわち，可算でなく，非可附番 (non-denumerable) である），あるいは同値な言い換えであるが，2^ω は非可算である，と結論してよい。ここで 2^ω は 0 と 1 からなるあらゆる無限列（すなわちωから 2 の中への関数）の集合である。ただし 2^ω を通常の指数づけの意味に解釈すれば，2^ω は可算となる（事実 $2^\omega=\omega$ である）ことに注意すべきである[2]。

註

1. 第13節90頁参照。
2. 第21節末尾（143頁）の「警告」参照。

第24節　基数の算術

集合の相対的な規模についてのわれわれの研究の１つの結果は，基数（cardinal number）という新らしい概念を定義することと，おのおのの集合Xに card X で示される１つの基数を結びつけることである。定義は，おのおのの基数 a に対して card$A=a$ をもつ集合〔複数〕Aが存在する，というものである。われわれはまた通例≦で示される基数に対する順序づけを定義する。これらの新概念とすでに自由に使えるようになっている概念との関連は簡単に記述できる。つまり，$X\sim Y$のとき，かつそのときにかぎり card $X=$card Y で，$X\prec Y$のとき，かつそのときにかぎり card $X<$card Y であることがわかるであろう。（a と b が基数のとき，$a<b$は，もちろん，$a\leqq b$ であるが，$a\neq b$ ということを意味する。）

基数の定義にはいくつもの進入路から入っていけるが，そのおのおのがそれぞれの強力な弁護人をもっている。できるだけ長く平和をたもち，かつまたその概念の本質的な性質は進入路とは無縁であることを示すために，基礎の構築を後へ〔次節まで〕のばそう。そしてその代りに基数の算術の研究へと進んでいく。その研究の過程で，われわれは上記の基数と集合の領有との関連を利用していこう。以後にやるべきところからはこれを借りておくだけでここの目的には十分である。

a と b が基数であり，A と B が card $A=a$, card $B=b$ の互いに素な集合ならば，定義によって $a+b=$card$(A\cup B)$，というように書く。C と D が card $C=a$, card $D=b$ の互いに素な集合ならば，$A\sim C$ でかつ $B\sim D$

である。そこで $A\cup B\sim C\cup D$ ということ，またそれから $a+b$ はAとBを任意に選ぶこととは独立に一義的に定義できること，が出てくる。このように定義された基数の加法は，交換律$(a+b=b+a)$をみたし，かつ結合律 $(a+(b+c)=(a+b)+c)$ をみたす。これらの等式はそれぞれ対応する合併集合の形成に関する事実から直ちに帰結するものである。

〈練習問題〉 a, b, c および d が $a\leqq b$, $c\leqq d$ の基数ならば，$a+c\leqq b+d$ であることを証明せよ。

無限の加項に対する加法の定義には何の困難もない。$\{a_i\}$ が基数の族であり，それに対応して添数をつけた $\{A_i\}$ がおのおのの i に対して $\mathrm{card}\,A_i=a_i$ となるような，対をとれば互いに素な集合の族であるとすれば，定義によって，

$$\textstyle\sum_i a_i=\mathrm{card}(\bigcup_i A_i)$$

と書く。前と同様この定義も一義的である。

2つの基数 a と b との積 ab を定義するには，$\mathrm{card}\,A=a$, $\mathrm{card}\,B=b$ の集合AとBを見つけて，$ab=\mathrm{card}(A\times B)$ と書く。AとBをそれらと対等な集合で置換しても同じ値の積が産まれる。これに代る別な言い方で，ab を「aをそれ自身に b 回加えること」として定義してもよかったのではなかろうか。これは無限和 $\sum_{i\in I} a_i$ の形成を指示するが，その際添数集合 I は基数 b をもち，I 内のおのおのの i に対して $a_i=a$ とする。このように提示された別定義がデカルト積を使うものと事実同値になることを検証するのは，読者には何の困難もないはずである。基数の積は交換律$(ab=ba)$をみたし，結合律 $(a(bc)=(ab)c)$ もみたし，また乗法は加法の上に分配される$(a(b+c)=ab+ac)$。これらの証明は初等的なものである。

〈練習問題〉 a, b, c および d が $a\leqq b, c\leqq d$ なる基数であれば，$ac\leqq bd$ であることを証明せよ。

無限の因数に対する乗法の定義に関しては何の困難もない。$\{a_i\}$ が基数の族であり，それに対応して添数をつけた族 $\{A_i\}$ が，おのおのの i に対して card $A_i=a_i$ となるような集合の族であれば，定義によって，

$$\Pi_i a_i=\text{card}(\mathsf{X}_i A_i)$$

と書く。この定義も一義的である。

〈練習問題〉 $\{a_i\}$ $(i\epsilon I)$ および $\{b_i\}$ $(i\epsilon I)$ が I 内のおのおのの i に対して $a_i<b_i$ となるような基数の族ならば，$\sum_i a_i<\Pi_i b_i$ である。

和から積へ進んだのと同じ仕方で積から指数へ行くことができる。基数 a と b に対する a^b の定義はもっとも有利には直接与えられる。しかしそれに代る別な進入路としては反復乗法を経由するものがある。直接の定義としては，card $A=a$, card $B=b$ の集合 A と B を見つけて，$a^b=\text{card } A^B$ と書けばよい。別定義としては，a^b を「a を自身に b 回乗ずる」と定義する。もっと精確にいえば，$\Pi_{i\epsilon I}a_i$ をつくればよい。ただしその際添数集合 I は基数 b をもち，I 内のおのおのの i に対して $a_i=a$ とする。指数についてのよく知られたいくつかの法則がなりたつ。すなわち，a, b および c が基数ならば，

$$a^{b+c}=a^b a^c,$$

$$(ab)^c=a^c b^c,$$

$$a^{bc}=(a^b)^c。$$

〈練習問題〉 a, b および c が $a\leqq b$ なる基数であれば，$a^c\leqq b^c$ であることを証明せよ。a と b は有限で1より大，そして c は無限だとすれば，$a^c=b^c$ であることを証明せよ。

これまでの定義やそれからの帰結はかなり手近に得られるもので，すこしも驚くようなところはない。もし有限集合だけに限れば，その結果はよ

く知られた有限の算術である。この節の主題の新しさは，少なくとも１項が無限であるような和，積および巾(ベキ)をつくる際に生ずる。「有限」および「無限」という語はここではごく自然な意味で使われている。つまり，ある基数は，それが有限集合の基数ならば有限（finite）で，さもなければ無限（infinite）である。

a と b が a が有限で b が無限な基数であれば，

$$a+b=b$$

である。その証明のために，A と B は A が何かある自然数 k に対等であり，B が無限な互いに素な集合であると仮定しよう。証明すべきは $A\cup B\sim B$ ということである。$\omega\precsim B$ であるから，$\omega\subset B$ と仮定してよいし，実際そう仮定する。$A\cup B$ から B への写像 f がつぎのように定義される：すなわち，f の A への制限は A と k との間の１対１対応であり，f の ω への制限はあらゆる n に対して $f(n)=n+k$ によって与えられ，また f の $B-\omega$ への制限は $B-\omega$ 上の恒等写像であるとするのである。その結果は $A\cup B$ と B との間の１対１対応になるから，証明は完結である。

つぎに，a が無限基数ならば，

$$a+a=a$$

である。この証明のために，A を $\operatorname{card} A=a$ の集合とする。集合 $A\times 2$ は A に対等な互いに素な２つの集合（すなわち，$A\times\{0\}$ と $A\times\{1\}$）の合併集合であるから，$A\times 2$ が A に対等であることが証明できれば十分であろう。われわれの使おうとする進入路ではそこまでのことを完全には証明できないであろうが，十分近いところまではいけるであろう。その着想は，求める１対１対応の構成を A のつぎつぎに大きな部分集合を使って近似していくことである。

精確に言えば，$\mathfrak{F}$ を，A のある部分集合 X があって，f の定義域は $X\times 2$ の形をしており，かつ，f は $X\times 2$ と X との間の１対１対応であるとい

えるようなあらゆる関数fの集まりとする。もしXがAの可算無限集合ならば，$X\times 2\sim X$ である。そうならば集まり $\mathfrak{F}$ は空ではないから，最小にみてAの可算無限部分集合Xに対して $X\times 2$ とXとの間の１対１対応を含んでいる。集まり$\mathfrak{F}$ には拡張による半順序がつけられる。ツォルンの補助定理の仮説部の満たされることはすぐに検証によってわかるから，$\mathfrak{F}$ はたとえて $\operatorname{ran} f=X$ の極大要素fを含む，ということが出てくる。

立言：$A-X$ は有限である。もし $A-X$ が無限であれば，それは可算無限集合，たとえてY，を包含するであろう。fを $Y\times 2$ とYとの間の１対１対応に結びつければ，fの真の拡張が得られるであろうが，それは極大であるとの仮定に矛盾する。

$\operatorname{card} X+\operatorname{card} X=\operatorname{card} X$ であるから，そしてまた $\operatorname{card} A=\operatorname{card} X+\operatorname{card}(A-X)$であるから，$A-X$ が有限だという事実で $\operatorname{card} A+\operatorname{card} A=\operatorname{card} A$ の証明は完結する。

加法についての基数の算術にもう１つの結果がある。それは，a と b は少なくともその一方が無限な基数であり，c は a と b のうち大きい方に等しいとすれば，

$$a+b=c$$

ということである。b が無限で，A とBは $\operatorname{card} A=a$, $\operatorname{card} B=b$ の互いに素な集合であると仮定する。$a\leqq c$, $b\leqq c$ であるから，$a+b\leqq c+c$ が出てくる。そして，$c\leqq \operatorname{card}(A\cup B)$ であることからは $c\leqq a+b$ が出てくる。求める結果は基数の順序づけの反対称性から出てくる。

乗法についての基数の算術の主結果は，a が無限基数ならば，

$$a\cdot a=a$$

ということである。この証明はこれに対応する加法上の事実の証明に似ている。$\mathfrak{F}$を，Aのある部分集合Xがあって，f の定義域は$X\times X$の形をしており，かつfは$X\times X$とXとの間の１対１対応である，といえるような

あらゆる関数fの集まりとする。XがもしAの可算無限部分集合ならば，$X \times X \sim X$である。そうならば，集まり$\mathfrak{F}$は空ではないから，最小にみてAの可算無限部分集合Xに対して $X \times X$ とXとの間の1対1対応を含んでいる。集まり$\mathfrak{F}$には拡張による半順序がつけられる。ツォルンの補助定理の仮説部は容易に検証でき，そして，$\mathfrak{F}$はたとえて $\operatorname{ran} f = X$ の極大要素fを含む，ということが出てくる。$(\operatorname{card} X)(\operatorname{card} X) = \operatorname{card} X$ であるから，この証明は $\operatorname{card} X = \operatorname{card} A$ を示すことで完結としてよい。

$\operatorname{card} X < \operatorname{card} A$ と仮定してみる。$\operatorname{card} A$ は $\operatorname{card} X$ と $\operatorname{card}(A-X)$ のうち大きい方に等しいから，この仮定は $\operatorname{card} A = \operatorname{card}(A-X)$ を含意する。そしてそこから $\operatorname{card} X < \operatorname{card}(A-X)$ がいえる。このことから，$A-X$ はXに対等な部分集合Yをもつ，ということが出てくる。互いに素な集合 $X \times Y$, $Y \times X$, $Y \times Y$ のおのおのは無限であり，かつ，$X \times X$ に，したがってXに，そしてまたYに対等であるから，それらの合併集合はYに対等である，ということが出てくる。fをその合併集合とYとの間の1対1対応に結びつければ，fの真の拡張が得られるが，それは極大であるとの仮定に矛盾する。そうなればわれわれのいまの仮定$(\operatorname{card} X < \operatorname{card} A)$は維持できないことになるから，そのことから証明は完結する。

〈練習問題〉 $\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$は少なくともその一方が無限な基数であるとすれば，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ であることを証明せよ。 $\mathfrak{a}$と$\mathfrak{b}$は$\mathfrak{a}$が無限で$\mathfrak{b}$が有限な基数であるとすれば，$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}=\mathfrak{a}$ であることを証明せよ。

第25節　基　　　数

いままでにわれわれは基数に関してまったくわずかばかりのことでも知ってきた。しかしまだ基数とは何であるかは知らないのである。ぼんやりとした言い方ですれば，ある集合の基数とはその集合がそれと対等なあらゆる集合と共有する性質である，と言ってよい。Xの基数はXに対等なあらゆる集合の集合に等しい，と言ってそれを精確にしてみてはどうか。ところがこの企ては失敗するであろう。そんなに大きな集合なんてありはしないからである。そこでつぎにやってみることは，われわれの自然数の定義への進入路との類比から示唆を得て，集合Xの基数をXに対等なある特定の注意深く選定された集合として定義してみることである。それがこれからわれわれのしようとすることである。

おのおのの集合Xに対して他にXと対等な集合はあまりにもたくさんある。われわれの第1の問題はその広大な領野を狭めることである。すべての集合がある順序数に対等なことは既知であるから，順序数の間から典型集合，代表集合を探すことは不自然ではない。

たしかに，1つの集合は多くの順序数と対等になることができる。しかしながら，おのおのの集合Xに対してXに対等な順序数〔複数〕が1つの集合を構成する，という事実は希望の目じるしになる。そのことを証明するために，まずXに対等なあらゆる順序数よりたしかに大きな，厳密に大きな順序数は容易につくれる，ということを見きわめておこう。実際γがベキ集合$\mathcal{P}(X)$に対等な順序数であると仮定してみる。αをXに対等な順

序数だとすれば，集合αは集合γに厳密に領有される（すなわち，$\mathrm{card}\,\alpha<\mathrm{card}\,\gamma$ である)。そこで $\gamma\leqq\alpha$ とすることはできないということが出てきて，したがって $\alpha<\gamma$ としなくてはならないわけである。順序数に対して $\alpha<\gamma$ は $\alpha\epsilon\gamma$ と同じことを意味するから，Xに対等なすべての順序数を含む集合すなわちγが見つかったことになる。そしてそうならばXに対等な順序数は1つの集合を構成するといえることになるわけである。

Xに対等な順序数の中からどれがとり分けられてXの基数と呼ばれるにふさわしいか。この問には自然な答がただ1つある。順序数のすべての集合は整列である。そして整列集合の最小要素はただ1つ特別な注意を要求すると思われるものである。

これで定義の準備ができた。基数 (cardinal number) とは，もしβがαと対等な順序数（すなわち $\mathrm{card}\,\alpha=\mathrm{card}\,\beta$）ならば $\alpha\leqq\beta$，といえるような順序数αのことである。この性質をもつ順序数はまた始数 (initial number) とも呼ばれてきた。Xが集合ならば，$\mathrm{card}\,X$つまりXの基数（Xの濃度 (power) という名でも知られている）はXと対等な最小順序数である。

〈練習問題〉 おのおのの無限基数は極限数[1] であることを証明せよ。

おのおのの集合はその基数に対等であるから，$\mathrm{card}\,X=\mathrm{card}\,Y$ ならば $X\sim Y$ ということが出てくる。逆に$X\sim Y$ならば $\mathrm{card}\,X\sim\mathrm{card}\,Y$ である。$\mathrm{card}\,X$ はXに対等な最小順序数であるから，$\mathrm{card}\,X\leqq\mathrm{card}\,Y$ が出てくる。そして事情はXとYで対称であるから，$\mathrm{card}\,Y\leqq\mathrm{card}\,X$ ともしなくてはならない。言い換えれば$X\sim Y$のとき，かつそのときにかぎって $\mathrm{card}\,X=\mathrm{card}\,Y$ である。これはわれわれが基数の算術を展開する際に必要とした基数についての条件の1つであった。

有限順序数（すなわち自然数）はそれ自身と別などんな有限順序数にも

対等にならない。そこでXが有限ならばXに対等な順序数の集合は単集合であるということが出てくる。またしたがってXの基数はXの順序数と同じになる。基数も順序数もともに自然数の一般化なのであって，よく知られた有限の場合にはどちらの一般化もともに始めにそれらを生ぜしめた特殊事例と一致するのである。これらの所見のほとんど自明な応用として，いまやベキ集合$\mathcal{P}(A)$の基数が計算できる。すなわちもし$\mathrm{card}A=a$ ならば $\mathrm{card}\,\mathcal{P}(A)=2^a$ である。（この結果は単純ではあるけれどもこれまでは言明できなかった，ということに注意してほしい。いままでは2が基数であるということがわからなかったのである。）証明は$\mathcal{P}(A)$ が2^A と対等であるという事実から直ちに得られる。

αとβが順序数ならば，$\alpha<\beta$ とか $\alpha\leqq\beta$ と言うことがどういう意味かわかっている。そこで基数は自動的に順序を備えて登場するのだ，ということが出てくる。その順序は，われわれが基数の算術の論議で前借した条件を満たす。事実，$\mathrm{card}\,X<\mathrm{card}\,Y$ ならば，$\mathrm{card}\,X$ は $\mathrm{card}\,Y$ の部分集合であり，そこで$X\precsim Y$が出てくる。もし$X\sim Y$とするなら，既に見ておいたように，$\mathrm{card}\,X=\mathrm{card}\,Y$ とすべきであり，だから$X\prec Y$としなくてはならないということが出てくる。最後に，もし$X\prec Y$ならば，$\mathrm{card}\,Y\leqq\mathrm{card}\,X$ であることは不可能である（相似は対等を含むから），したがって，$\mathrm{card}\,X<\mathrm{card}\,Y$ である。

これらの考察の応用として，あらゆる基数aに対して妥当する

$$a<2^a$$

という不等式をあげておく。証明：Aが $\mathrm{card}\,A=a$ の集合ならば $A<\mathcal{P}(A)$であるから $\mathrm{card}\,A<\mathrm{card}\,\mathcal{P}(A)$，そしてそれゆえ $a<2^a$ である。

〈練習問題〉 $\mathrm{card}\,A=a$ ならば，Aのそれ自身の上へのあらゆる1対1写像の集合の基数は何か。Aのあらゆる可算無限部分集合の集合の基数

は何か。

順序数の順序づけに関する事実は同時に基数の順序づけに関する事実である。そこでたとえば，いかなる2つの基数も比較可能（つねに $a<b$ か $a=b$ か $b<a$）であり，また実際に基数のすべての集合は整列である，といったことがわかる。また，基数のすべての集合は上界（実際には上限）をもつこと，およびなおその上に，基数のすべての集合に対して，それら〔基数〕のどれよりも厳密に大きい基数が存在すること，なども知られる。この最後のことは，最大基数はないということ，あるいは同値な言い換えであるが，正確に全基数だけからなるような集合はないということ，を含意している。そのような集合があるとする仮定にもとづく矛盾はカントールのパラドクス (Cantor's paradox) の名で知られている[2]。

基数が特別な順序数であるという事実は，理論のある面を単純化してはくれるが，同時に，どうしても避けなくてはならないような混乱の可能性を持ち込むものでもある。面倒が出てくる主源泉の1つは算術上の演算に対する記号法である。もし a と b が基数ならばそれらはまた順序数でもあり，その結果，和 $a+b$ は2つの可能な意味をもつことになるのである。2つの基数の基数和は一般にその順序和と同じではない。ただこうしたことはみな実情以上に都合悪く聞こえるものであるが実用にあたって混乱を避けることは簡単なのである。文脈によって，基数に対する特別な記号の使用によって，またその時その時の警告によっても論議の流れをまったくスムースにすることはできるからである。

〈練習問題〉 α と β が順序数ならば，$\operatorname{card}(\alpha+\beta)=\operatorname{card}\alpha+\operatorname{card}\beta$ および $\operatorname{card}(\alpha\beta)=(\operatorname{card}\alpha)(\operatorname{card}\beta)$ であることを証明せよ。左辺の演算については順序数による解釈を，そして右辺には基数による解釈を使用せよ。

しばしば使われている基数に対する特別な記号の１つは，ヘブライ語のアルファベットの最初の文字（$\aleph$，アレフ）である。そこで特に最小の超限順序数，すなわちω，は基数であるが，基数としてはそれはいつも$\aleph_0$で示される。

これまでわれわれが陽表的に名付けてきた順序数はどれも可算である。ところが多くの集合論の応用に際して重要な役割を演ずるのは最小の非可算順序数で，それはしばしばΩで示される。ωのもっとも重要な性質は，そのおのおのの始切片が有限であるような無限整列集合であるということであるが，それに対応して，Ωのもっとも重要な性質は，そのおのおのの始切片が可算であるような非可算無限整列集合であるということである。

最小の非可算順序数Ωは明らかに基数の定義条件をみたしているので，それが基数の役割をするときにはいつも$\aleph_1$で示される。同値なことであるが，$\aleph_1$は，$\aleph_0$よりも厳密に大きな最小の基数，あるいは言い換えれば，基数の順序づけでの$\aleph_0$の直後者[3]，というように特性づけてもよい。

$\aleph_0$と$\aleph_1$との間の算術上の関係は基数に関する著名な古来の問題の主題である。算術演算によってどうして$\aleph_0$から$\aleph_1$に到達することができるか。これまでにわれわれにわかっているのは，和と積をふくむもっとも初等的な歩みでは$\aleph_0$から出て再び$\aleph_0$にもどっていくにすぎない，ということである。$\aleph_0$から出発してそれより大きいものに到着するのにわれわれが知っているもっとも単純なことは，$2^{\aleph_0}$をつくることである。それゆえ$\aleph_1 \leqq 2^{\aleph_0}$はわかっている。この不等式は厳密な関係になるであろうか。$2^{\aleph_0}$より厳密に小さい非可算基数はあるのであろうか。有名な<u>連続体仮説</u>（continuum hypothesis）は，推測としてであるが，その答はノーである，あるいは言い換えれば$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$である，と立言する。たしかに知られていることは，連続体仮説は集合論の諸公理と無矛盾だ，ということだけである。

おのおのの無限基数aに対して，aより厳密に小さなあらゆる無限基数

の集合 $c(a)$ を考えよう。$a=\aleph_0$ ならば $c(a)=\varnothing$ であり，$a=\aleph_1$ ならば $c(a)=\{\aleph_0\}$ である。$c(a)$ は整列集合であるから，それは１つの順序数，たとえて α をもつ。a と α との関連は通例は $a=\aleph_\alpha$ と書いて表わされる。基数 $\aleph_\alpha$ のもう１つ同値な定義は超限帰納法によって進んでいくもので，その進入路にしたがえば（$\alpha>0$ に対して）$\aleph_\alpha$ は，$\beta<\alpha$ のあらゆる $\aleph_\beta$ より厳密に大きな最小の基数である。一般連続体仮設（generalized continuum hypothesis）というのは，おのおのの順序数 α に対して $\aleph_{\alpha+1}=2^{\aleph_\alpha}$ という憶測のことである。

註

1. 第20節135頁参照。
2. このパラドクスについては「訳者あとがき」参照のこと。
3. 第14節97頁参照。

訳者あとがき

本書は Paul Richard Halmos (1916—) の *Naive Set Theory*, 1970, Springer-Verlag, New York の日本訳である。原書はシュプリンガー社（ニューヨーク）の Undergraduate Texts in Mathematics という叢書中の一冊であるが，もと Van Nostrand 社 (Princeton, N. J.) から出ていた The University Series in Undergraduate Mathematics という叢書中に含まれていた (1960刊) のを複刻したものである。著者ハルモスはヴァン・ノストランド社時代の叢書でも編集者の一人であったが，シュプリンガー社の叢書では監修責任者 (managing editor) になっている。

著者のことなど

P. R. Halmos は『有限次ベクトル空間』(*Finite-Dimensional Vector Spaces*, 1942) や『測度論』(*Measure Theory*, 1950) などの名著によってわが国でもつとにその名を知られたアメリカの数学者である。イリノイ大学を出て (1934)，続けて修士さらに博士(Ph. D.) の学位を得たのが1938年。その後母校に勤め，その間3年ばかりはプリンストン高等研究所の助手などもして，シカゴ大学に15年ほど在籍してから，1961年にミシガン大学の数学教授になった。1968年からはハワイ大学の数学教授，同主任教授をつとめ，1970年にインディアナ大学数学教授に転出して現在に至っているようである。1947—8年にはグッゲンハイム研究員になっており，またいくつかの大学に招待教授として出講したこともある。

著書としては本書や上記2著のほかに，

Introduction to Hilbert Space, 1951

Lectures on Ergodic Theory, 1961
Algebraic Logic, 1962
Lectures on Boolean Algebra, 1968
Hilbert Space Problem Book, 1967

などがある。なお 'How to write mathematics', *L'Enseignement Mathematique*, 1971, というエッセイが「数学の書き方　I・II」という題名で吉田洋一・勝江御夫妻の訳筆により雑誌『科学』に最近掲載された (1974, Vol. 44, No. 7, 8, 岩波書店) ので, 御覧になった方も多いかと思う。それはそれで味わい深い読物であるとともに, かれ一流の文体その他推敲のきいた構成, 記号の使い方など, かれの著作のいわば外伝的な理解に大いに役立つ文章だといえる。

カントールが集合論関係の最初の論文 'Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen,' *Crelle's Journal*, 77, を世に問うたのは1874年であった。そこで昨年 (1974年) は「集合論100年」というような特集企画が数学関係の啓蒙雑誌にも登場して, わが国の集合論への関心も一層広がっているようである。だいたいこの十数年来数学教育の近代化というかけ声がかかって, 最近では小学校の低学年のカリキュラムにまで集合の考えが入ってきた。先日もある小学校で1年生の入学後1ヶ月目くらいの授業を参観したが, 先生は鶏だの象だの犬だのの絵の切り抜きを何枚か黒板にはりつけて, 鶏は鶏ばかり, 象は象ばかりというように分けて集めさせる。そして, たとえば鶏の絵が3枚あるとするとその枚数を数えさせるのであるが, 続けて, これで何が得られたかという意味の問いを生徒に対して出された。見ていたわたくしは多少驚いた。小学校の新入生にこのさき何を答えさせようというのであろう。答は3羽の鶏でも, 3枚の鶏の絵でもなくて, 「ハイ, 3のなかまです」というのであっ

た。なるほど。子供たちの方はといえばもうそれは以前に教わっていたことらしく授業はすらすらと進んでいった。犬の絵の集まりとの1対1の対応をしらべる，というように。3のなかまというような表現はわたくしたちの受けた初等教育では出てこなかったものである。3個の要素からなる集合の集合の名として基数3を理解させようとする試みだと思ったが，基数をそのようにフレーゲ・ラッセル流に促えておくことが初等算術からさらに進んだ数学に入っていくときにどうなるのか。順序数概念との関連はどうするのか。いろいろ考えておかなくてはならないことは多いにせよ，ともかく，現にわが国の初等教育にもこうして集合の考えがかなり表面化して出てきていることは間違いない。十年ばかり前に高等学校の数学に「集合と論理」という項目が現われて，現場の教師をいささかあわてさせたのであったが，今では小学校1年の最初から集合である。この急速な変化が広く一般の集合論への関心を高めてきたことは確かであると思う。

ところが一方，数十年前から集合論というのは抽象的な高等数学の入口で教わるもので，まず一般には縁遠く，わかり難いもの，という固定観念が中年以上のひとびとの間にはいきわたっている。素朴な集合の考えと集合論，とくに公理化された現代集合論とは直ちに相覆うものではない。小学生の集合の考えと抽象的な集合論とのギャップはどう処理していけばよいか。これはわが国数学教育の現状で考慮すべき重要な問題点の1つであると思う。集合についての啓蒙的な通俗読みものもかなり出回ってきたようである。一方公理的集合論の高度な著・訳書の類も出版されている。そして依然として上記のギャップを感ずるひとを満足させるような書物——ほんとうの意味の集合論の解説書は見当らない。

だいたい集合論は大げさに言えば全数学の基礎に擬せられるそれ自身数学の一部なのであるが，その「基礎になる」という位置づけのために，カントール以来，あるいはそれ以前からも哲学的な論議を多く呼んできた。

それがかえって空論続発のわりに実質的なほんとうの解説書の出現をはばんだのかもしれない。哲学論議が悪いのではあるまい，またそれを無理に避けることもよくないであろう。集合論の本体ぬきで哲学めいた論議にふりまわされるのがいけないのである。

このように考えるとき，ここに訳出したハルモスの『素朴集合論』は，著者自身が序文で述べているようにそんな意図で書かれたものではないにもかかわらず実地に上記のギャップを越えていく手引きもしてくれ，また哲学論議との対面の正しい準備も与えてくれるもののようにわたくしには思える。この書物はいわば前向きに，高等数学を学ぼうとする者の立場で，哲学論議は最少限にして，書かれたものであって，後を省りみてギャップの深さをあげつらったり，数学以外のところで道草をくったりはしない。しかし碩学の慎重に案配された集合論の内実が，期せずしてほんとうの解説書のになうべきそのような任務をも果させているのであろう。

集合論が現代の公理的集合論に至るには，またその公理的集合論にも，苦渋にみちた障礙は多い。本書は現代集合論の先端的なトピックスにはふれない。しかし，ほんとうは，「カントールがわれわれのためにつくり出してくれた楽園から，なにびともわれわれを追い出せはすまい」とヒルバートが言ったように，（素朴）集合論は，数学者のパラダイスでもあるのである。その鳥瞰図が本書である。どうか勇んで読み進んでいただきたい。

素朴ということ

本書の標題でもある「素朴集合論」ということばについては多少の説明がいるように思う。集合論への関心が高まってきたとはいえ，このことばが一般のひとに準専門用語として受けとられるまでには至っていないようだからである。

といってもこの素朴集合論という語をいつ誰が使い初めたのか，それは

筆者も詳かにしない。またその語がたとえば集合論内部の用語のように純学術語として明確に定義されているわけでもない。岩波の『数学辞典（第2版)』の「集合論」の項を見ると，「素朴な意味における集合とは，ある条件 $C(x)$ をみたす x の全体 $\{x \mid C(x)\}$ のことである。そして，任意の条件 $C(x)$ に対して集合 $\{x \mid C(x)\}$ が存在するというのが，素朴な集合論におけるただ1つの生成原理であり，**内包性公理**（英 axiom of comprehension，独 Komprehensionsaxiom）とよばれる。しかし，‘任意の集合’という概念を明確なものと考える限り，この考えは矛盾を含む。……」というように書かれている。この矛盾を避けるために内包性公理を捨てて他のいくつかの集合構成原理を公理に立てる「公理的集合論」が考案されたのである。それで，本書の序文にもあるように，「集合論では「素朴」と「公理的」とは対照的な語である」ということになる。

こう見てくると，歴史的に言って素朴集合論というのはカントールから1908年のツェルメロの論文の前までの集合論，あるいは1902年のラッセルとフレーゲの往復書簡――これでいわゆるラッセルのパラドクスが確認された――以前の集合論を意味するといえよう。しかし現在パラドクスに逢着することがわかってしまってからこの意味の素朴集合論をそっくりそのまま呈示するのはナンセンスというものであろう。本書に展開される素朴集合論はしたがってこの意味の素朴集合論ではない。歴史的な素朴集合論ではパラドクスの意識さえ表面には出ないのであるが，本書ではしかるべくパラドクスにも言及されており，また集合生成の公理もみな挙げられているのであるから，その点ではむしろ公理的集合論と内容を共にすると言うべきである。

では，本書の素朴集合論とはどういうものであるか。一言でいえば序文にあるとおり「素朴な観点からする公理的集合論」なのである。そしてその「素朴な観点からする」ということがさらに2つの事柄に分けられる。

1つは「言語や表記が日常的非形式的」であるという点で，もう1つは「集合論が事実の集積であるとみなされている」点である。

第1の非形式言語による叙述ということに関しては，公理的集合論が形式論理学と相並んで，むしろ一体となって発展した，という事情と併せて考えてみるべきことであろう。その詳細はここで述べていられないが，現在公理的集合論はほとんど少なくともその重要な公理，定理を形式化された記号言語で書き，証明までもできるだけ形式化して行なう，というやり方で展開される。もちろんそのやり方には，厳密さや公理系相互の比較・移行に関して，あるいは無矛盾性や完全性，独立性など公理系の論理要件の確認の便に対して，明らかな利点があるのである。しかし一方そこには，まずその形式言語の文法を習得して運用に慣れるという，主題（集合論）とは無関係の準備がかなり要求されること，そして実際に主題の展開にあたっても単刀直入に集合に関して知りたい事実に切り込んでいけないで，使っている言語に関する事項の踏み固めに手数を要する場合があること，何よりも記述や証明が長くなってわずらわしいこと，といった解説書には不向きな点もあるわけである。まず主題についての興味ある事項を手っ取り早く要領よく知りたい，という「素朴」な願望に答えるには，形式言語の負荷を軽減して，できるだけ日常語によりながら非形式的に述べ進む，というのが大方に採用されるところである。ハルモス自身，他のところでも（「数学の書き方」，『科学』，Vol. 44，No. 8，506頁）「形式論理の記号は数学の論理を論ずるためには不可欠のものだが，人から人へ考えを伝える符号としては手におえない厄介な符号である。著者はその考えを符号化し，読者は著者の書いた符号を普通文に直さなければならない。両段階とも時間の浪費だし，理解への障害にもなる。現代論理学の意味での記号的記述は，機械は書きうるが，機械以外に読みうるものはあまりない，といったたちの代物である」と言っている。こうして本書が『素朴集合論』と題さ

れた１つの理由は，集合論についての公理組織をではなしに，公理系に構築できるはずの集合についての知識をじかに求めたい，という「素朴」な知識要求に答えるために，非形式言語で叙述されたこと，である。もちろんだからといって本書の論理構成が厳密に言えば誤りとも見られるようなことを平気で蓋をして通るように無神経になっているとか，通俗化のためにかえってあいまい多義な日常語が乱用されているとかいったことはいささかもない。日常的非形式的な言語を使うと言っておいてすぐに著者は「ただし形式化可能な」とことわっている。必要とあらばいつでも厳密な形式言語に直せる配慮の行き届いた本文は，１組の公理からの導出という点では，形式化された公理的集合論にひどく劣らない論理構成をもっているのである。「素朴」はここでは決して「たやすいこと」と短絡しない。

つぎにこのことと関連しながら本書の特色として注意しておきたいのは本文の随所にみられる heuristic な行文のことである。この訳書ではその語を「発想順の」とか「発想順を示す」というように訳しておいたが，それはもともと「見つける」「発見する」という意味のギリシャ語 ‘heuriskein’ に由来する語である。形式化された公理系では公理，定義，定理系，…とまぎれもない１つの秩序，順序で演繹が展開されていく。しかしそれはすでに発見せられた事柄の論証の順，証明の順であって，その事柄の発見にいたる考えの展開の順とはかならずしも一致するものではない。いわば定理に述べられる事項の追認，あるいは論理上の身分保証の手順を示すものが形式化された公理系の展開であって，それはある概念や命題を発見していく手順とは極端にいえばちょうど逆になることもあるくらい別のものである。「証明の順」とは別に，発見にいたる考えの発展の順を示すということで，本書では ‘heuristic’ を「発想順の」と訳した次第である。

ある概念や命題の発見にいたる道が一筋でないことはよく知られているとおりである。しかし一筋でないというだけのことならば，ある定理の証

明の順も一通りではないのであるからあまり事情はかわらない。そうではなくて，証明の論理学ができるようには発見の論理学はできない，というところに ‘heuristics’ の困難と危険があるのであろう。「発想順の」といっても，それはある時ある処でのある人の心に浮かんだ想念の順，というようなある一連の心理的な事実の順と同義ではない。それならば広い意味での伝記の順であろう。ここでいう発想の順は証明の順とは異なるのであるが，それでもやはり一般化されるものでなくてはならない。その一般化も心理の順序としては解明しつくされないもの，強いて言えばやはりある種の論理的な順序として一般的なものである。といっても発見の論理学ができないかぎり，この論理的な順序という語にも大した意味は負わせられないのであるが，ただわたくしはこのような「発想順の」論考が書けるのは，実際にみずから多くの重大な発見を重ねてきた，そしてまた「人から人へ考えを伝える」教育にも練達した，いわゆる大家にかぎるように思うのである。

例をとってみる方がわかりやすいであろう。本書第 6 節の「順序対」の導入はこのように進められる。a, b, c, d からなる集合Aについて，その要素間に $\langle c, d, b, a\rangle$ という順序をつけることは，「順序」の形式的な厳密な定義を要しないでもできるとハルモスは言うのである。「そのこと〔順序〕の意味するところについて厳密な定義はなくても，われわれはそれについて集合論で理解できることをやっていくことはできる」。つまり，$\langle c, d, b, a\rangle$ という順序をつけていく途中の各段階ごとに，それまでに現われた全要素の集合をつくっておく，という操作をすると，

$$\{c\},\ \{c, d\},\ \{c, d, b\},\ \{c, d, b, a\}$$

という 4 つの集合ができる。この 4 つの集合（それぞれはAの部分集合）の集合を$\mathfrak{C}$としよう。$\mathfrak{C}$はその要素となる集合や，そのまた要素である文字の順序にはまったく関係ない。つまり $\{\{c\}, \{c,d\}, \{c,d,b\}, \{c,d,b,a\}\}$

としても $\{\{b,c,d\}, \{c\}, \{a,b,c,d\}, \{c,d\}\}$ といったように自由に要素を並べかえてもかまわないのである。ところで逆に，この順序不問の $\mathfrak{C}$ の要素のうちすべてに共通な要素をまずとりのけ，残ったものからまたそのすべてに共通な要素をとりのけ，というようにしていけば，$\mathfrak{C}$ から出発してもとの順序 $\langle c, d, b, a\rangle$ にいたることができる。つまり，

$$\langle c,d,b,a\rangle \rightleftarrows \mathfrak{C} = \{\{c\}, \{c, d\}, \{c, d, b\}, \{c, d, b, a\}\}$$

であるから，順序つき集合 (c, d, b, a) が順序の概念を使わないで $\mathfrak{C}$ によって定義されたことになる。集合 A が 2 要素から成る場合，順序対 (a, b) は

$$(*) \quad (a, b) =_{\mathrm{Df.}} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

である。と，まあ「発想順」にこうして順序対が導入されるのである。読者はこれでかなり素直に順序対の定義の理解に達しられるはずである。形式体系の順で最初にいきなり順序対の定義（$*$）を示されたならば，ずいぶん理解に手間どり，少なからず戸惑いを感ずるに違いない。事実この定義は時として「病理的」とさえ呼ばれるものだからで，専門の数学者にさえ「不信と疑念」を感じるものが多いほどである。その点本書ではヒューリスティックな解説でその難を避けているのであるが，なおその上に著者はそのような不信と疑念の源泉をもまた適確に指摘してくれている。「われわれの定義した概念の主性質はすべて正しく（つまり直観の要求に合致しており），また一切の正しい性質は提示されている。厄介なのは，その概念に偶然に入りこんできてひとを惑わすような的はずれの性質（順序対 (a, b) の要素になぜ $\{a, b\}$ が属しなくてはならないかといったこと）があることなのである」という次第である。さらに著者は続ける，「順序対という概念は公理によって過不足なく正しい性質だけを賦与して基本用語に追加導入することもできたであろう。そうしている理論もある。数学者は，すこし多くの公理を憶えなくてはならないことと，すこしばかりの偶有的な事実を忘れなくてはならないこととの間で選択すべきなので」ある，と。

これもまた，数学の発想の貴重な一面を見事に言いあてた名言というべきであろう。

本書は形式言語で綴られていない。そしてそのために証明の順ではない発想の順によるこうした行文が使えるわけで，それが集合論に対する一般読者の接近への抵抗をぐんと減少させていると思う。そればかりか数学者の発想の秘所をのぞかせて興趣深い，とさえ言える。数学の発見は素朴ではあるまい。それでも証明は発見より後の，あるいは発見とあざない合わされた手続きである。「発想順の」行文は，直接「素朴」とは関係ないが，本書の「素朴」の一つの要件，日常的非形式的言語の使用，ということとは緊密に関連していて，訳者が本書をすすめたい美質の１つになっているのである。

さて，著者が言う本書の「素朴」のもう１つのいわれである「集合論が事実の集積であるとみなされている」点を考えてみる番であるが，著者自身もこの点が非形式的な述べ方よりもっと重要な意味で「素朴」と呼ぶことにつながると言っているように，これは重々しい議論を呼ぶ事柄である。ただしこの議論はたとえば「素朴実在論」というような用語にも関連する哲学的な内容のものを主とすることになるであろう。そして哲学論議は著者の避けようとしたことであるので，この「あとがき」でもこの点にはあまり触れないでおく。要するに集合を実在の対象とみて，たとえ直観を越えたような大きな集合についても，ここに述べられることはその実在集合に関する事実だと考えよう，という「素朴」な立場がとられているということなのである。

パラドクスのこと

歴史的な素朴集合論が公理的集合論に変ってきたのはパラドクスが指摘されたことによる。本書の素朴集合論はすでにみたように歴史的素朴集合

論ではない。パラドクスの洗礼を経た素朴集合論である。それで本文中にもラッセルのパラドクス，ブラリ・フォルティのパラドクス，カントールのパラドクスの名が出てくる。ただそれらパラドクスの内容などは詳しく書かれていないので，ここで集合論とパラドクスのことを簡単にまとめておくのも多少の参考にはなるであろう。

パラドクスあるいはアンティノミーという語がいつごろどうして造語されたか，それは知らないが，ここで問題になるのは広い意味での論理的パラドクスである。というのは与えられた条件から推論していけば矛盾が避けられなくなるという形のパラドクスのことである。今世紀への変り目前後から続々掘り起こされてきたこれらのパラドクスは，古来から知られているものも合わせて，大体ラムゼイ（F. P. Ramsey，1925）に由来する分類を受けるようである。それは狭義の論理上の（論理主義者であったラムゼイの言葉でいえば数学上の）ものと，意味論上の（ラムゼイの言葉では認識論上の）ものとになる。

狭義の論理上のパラドクス（集合論のパラドクスとも呼ばれる）というのは，矛盾が出てくるもとを，ラッセルがやったように，もっぱら論理（集合論ないし数学）に帰することのできるようなパラドクスであって，その代表的なものは，(1)ラッセルのパラドクス　(2)カントールのパラドクス　(3)ブラリ・フォルティのパラドクスである。一方意味論上のパラドクスというのは，そこに使われる用語の中に「真」とか「指示する（記述する）」とか「形容詞」とかといった論理（数学，集合論）には必要のないものが含まれており，そういう用語の意味や用法がパラドクスに導くもののことである。代表的なものとしては，(4)「うそつき」のパラドクス，(5)リシャールのパラドクス，(6)ベリイのパラドクス，(7)グレリングのパラドクス，などを挙げることができる。以下手短に各パラドクスを紹介しておこう。

〔論理上のパラドクス〕

(1) ラッセルのパラドクス(1902)。すべての集合は，自分自身を要素とする（たとえば集合の集合（集合を要素とする集合）というのを考えれば，それ自身が集合なのであるから自身の要素でなくてはならない）か，または自分自身を要素としない（ごく常識的な集合を考えればよい）か，の2つの類のいずれか一方に所属するはずである。そこで，自分自身を要素としない集合のすべてからなる集合，というのを考えてみると，それ自身は自分を要素とする集合であろうか，要素としない集合であろうか。ちょっと考えればわかるように，自分を要素とするとしてみれば自分を要素としないことを結論しなくてはならないし，自分を要素としないとしてみれば自分を要素とすると結論しなくてはならない。これはパラドクスである。

(2) カントールのパラドクス(1899)。これは基数（濃度）の概念にかかわるので，詳しくは本文を読み進まれた段階で再検討されるとよい。簡単に言うと，まず集合Yの基数 card Y を，Yと1対1対応のつく集合Xすべての集合と定義してみる。そしてYがZの部分集合と1対1になるとき card $Y \leq$ card Z とし，card $Y \leq$ card Z ではあるが card $Y \neq$ card Z のとき card $Y <$ card Z と書くことにする。カントールの定理によると，Yのあらゆる部分集合の集合 $\mathcal{P}(Y)$ に対して card $Y <$ card $\mathcal{P}(Y)$ が言える。ところが，あらゆる集合の集合$\mathcal{C}$をとると card $\mathcal{C}$ は最大の基数であるから（あるいは $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ も$\mathcal{C}$の要素でなくてはならないから）card $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \leq$ card $\mathcal{C}$。一方カントールの定理からは card $\mathcal{C} <$ card $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ であるから，これはパラドクスである。

(3) ブラリ・フォルティのパラドクス(1897)。これは順序数についてカントールのパラドクスと同様のことが起こることを言うものである。いかなる順序数にもそれより大なる順序数の存在することが示せるとともに，あらゆる順序数の集合によってきまる順序数を考えれば，それは最大順序

数を与えることになるから，パラドクスだというのである。

〔意味論上のパラドクス〕

(4)「うそつき」のパラドクス。これは古来のものである。誰かが「わたくしはいまうそをついている」と言ったとしよう。ほんとうにうそをついているのならそのひとは真実を告白しているわけであり，うそをついていないのであればそのひとのいうことが真実，つまりその言うとおりうそをついていることになる。少しずつ変った形でこのパラドクスは古代ギリシャから現代の論理学者まで様々に扱われてきたものである。

(5) リシャール (Richard) のパラドクス (1905)。実数を記述する日常語句，たとえば実数 π を記述する「円の周と直径の比」というような語句を考えてみる。漢字かなまじりの日本語では説明が面倒なので，英語を日常語の例として想定してもらおう。英語で実数を記述する語句はみな集めて一定の順序で数え上げることができる。たとえば，k 個の文字からなる語句をみなそろえてそれを辞書式に並べる，そしてその全体を（$k+1$）個の文字からなる語句群の前におく，というようにすればよいであろう。このようにして数え上げて n 番目の語句が記述する実数をリシャール数 n の実数と名付けてみる。さて，（すべての実数は無限小数に展開できるが），「すべての n に対して，リシャール数 n の実数の小数第 n 位の数字が 1 でなければそれ自身の小数第 n 位は 1 で，リシャール数 n の実数の小数第 n 位の数字が 1 であればそれ自身の小数第 n 位は 2 であるような実数」という語句をとりあげてみる。これは明らかに一定の実数を記述するから，この語句によって記述される実数のリシャール数がきまるはずである。それをたとえば k としてみる。ところが上記の語句どおりにいけばこの実数は，リシャール数 1 の実数とはすくなくとも小数第 1 位が食違い，リシャール数 2 の実数とはすくなくとも小数第 2 位が食違う，……というようになっている。だからリシャール数 k の実数とはすくなくとも小数第 k 位の数字

が異なるわけで，したがってこの実数のリシャール数は k ではない，という矛盾が生じるのである。

(6) ベリイ (Berry) のパラドクス (1906)。これも英語で考える方がわかりよい。すべての英語表現はそれぞれ有限個の音節を含んでいる。そしてたとえば40音節より少ない音節の英語表現で記述される自然数は有限個しかないはずである。ところが ‘the least positive integer which is not denoted by an expression in the English language containing fewer than forty syllables’（40音節より少ない英語表現では記述できない正整数のうち最小のもの）を k としてみると，この英語の語句は40音節にみたないのに k を記述していることになる。

(7) グレリング (Grelling) のパラドクス (1908)。これは形容詞に関するパラドクスである。形容詞は何かある性質を述べるものであるが，その性質がその形容詞自身にもあてはまるとき自叙的 (autological)，そうでないとき他叙的 (heterological) というように形容詞を分類してみる。「短かい」という形容詞はそれ自身短かいから自叙的であるが，「大きい」という語は自身大きくはないので他叙的という次第である。ところで，「他叙的な」という形容（動）詞自身は自叙的であろうか他叙的であろうか。これまた自叙的だとすれば他叙的でなくてはならず，他叙的だとすれば自叙的でなくてはならないことになって，パラドクスである。

これらのパラドクス，とりわけ論理上のパラドクスは，全数学の基礎と目された集合論の根柢をゆるがすところから，いわゆる「基礎の危機」という意識を呼び醒ました。そして数学者や数理哲学者の多くがこれらのパラドクスを回避する提案を行なった。それらの提案はすべてパラドクスの導出に際して入ってくる「素朴な」概念に何らかの仕方で制限を加えようとするものであったが，その仕方によって周知のように大きく３つの立場

が分かれた。1つはラッセルを中心とする論理主義の立場で，哲学者が多く加担した考えである。その中軸は「型の理論」(theory of types) と称される理論にある。詳細はここで述べているわけにいかないが，もっとも粗略に言えば，すべての対象がその「型」として一定の負でない整数をもつ，そこで「xは集合yの要素である」というようなことを言うときは，yの型がxの型より1つだけ大きいときにかぎり意味をなす，とするのである。そうなると，たとえばラッセルのパラドクスについては，自分自身を要素とする集合とかしない集合とかいうのがその元凶であったのであるが，型の理論からすればそのような集合規定は無意味で，そんな集合は存在しない，ということになり，それでパラドクスは消滅するわけである。ただこの流儀であらゆるパラドクスを回避しようとなるとひどく複雑に枝分れした階型がどっと出てきて，厄介至極である。もっともラムゼイの着想に発してクワインまでいろいろ単純化の方法が工夫されてきたが，この立場は論理主義という旗印に対する防禦本能もいくらかはたらいたかに見えて，概して数学者には歓迎されないできた。

もっとも多くの数学者が迎え入れたのは公理主義（形式主義）の立場である。これは前にもちょっと触れたように (173頁)，内包性の公理を捨てて，何でもかんでも集合と呼ぶことはやめよう，とする立場である。公理によって存在を保証された集合だけを集合とする。したがって初めからパラドクスが生じない自信のもてるような公理を選べばよいので，公理系はパラドクスを生じない用心を予めしながら自由につくり出せることになる。しかし集合と呼べるものを余り狭く限っても全数学での使用にたえる集合論はできない。どれだけの公理を集合構成のために立てていけば，パラドクスを避けたうえ数学の実行に必要十分であるか，これは公理主義でもっとも困難な問題を呼ぶところである。とまれ，本書も原著者の序にもあるとおり，大筋はこの公理主義によっているのであるから，その考え方は本

文を味読しつつ体得されるのが最良と思う。そしてツェルメロに始まり，型の理論との混成をはかったクワインの**NF**のようなものまで，いろいろな公理的集合論がつくられてきたが，第3節註6を併読しておいてもらいたい。

3番目に，ある意味でもっと根源的にパラドクスを解釈しようとしたのはブロウェル (Brouwer) などの直観主義者たちである。無限集合をも含めるかぎりでは排中律まで拒否して徹底的な構成主義を唱えるかれらの立場では，パラドクスの生ずる心配はもっとも少ないかもしれない。しかし，その哲学がひどくわかりにくいことと，厳重さの余り許される数学の内容が余りにも乏しくなることがその欠点とされている。

このようにパラドクスとそれへの対応が今世紀の集合論，数学基礎論の主な流れをつくり出してきたのであるが，3つの立場それぞれの現下の研究状況などにここではこれ以上突っ込んだ解説は不要と思うので，記述不足のところは好学の士が進んで適当な参考書によって補っていかれるよう希望するにとどめさせていただきたい。

訳文のことなど

本書の訳はできるだけ原文に忠実にと心掛けたつもりであるが，著者ハルモス独自の含蓄の深い名文の味わいは到底伝えられていないことと思う。ただわかりよいことを，優先させ得ると判断できたかぎりで優先させたつもりである。また数学者の常用する口調にも，時に文学的なぶかっこうを承知で，合せるようにしておいた。結局はそれがわかりやすいと思ったからである。

どの翻訳書にもあると言われるが，浅学非才の訳者による本書には，思わぬ誤訳なども多くひそんでいることと思う。読者諸賢の御叱正をお願いする次第である。

本文中ゴチック字体のところは原文もゴチック，下線は原文イタリック字体の部分，＜　＞は原文が大文字になっているところである。また〔　〕は訳者が意味を補うつもりで挿入した文である。

各節末にまとめた註はすべて訳者の附したものであるが，所詮は繁閑よろしきを得ぬ邪魔な蛇足に過ぎないことを恐れる。適宜読み飛ばしていただきたい。また註の中にあげておいた文献のみを次に一覧にしておく。集合論を学ぶための文献リストと言えるようなものではさらにないが，本書をもとに勉学を進められようとする方々には何かの手がかりになるかとも思っている。

最後に，ささやかな本書が出るについても実に多くの方のお力添えを戴いたことがあらためて身にしみてくる。一々御芳名を記すことは略させていただくが，訳者は一杯の感謝に満ちている。出版社の方々にも杉田社長はじめ，翻訳権の交渉以来ずっと御厄介をかけ通してきた。特に終盤近くに訳者が病気になって出版がずいぶん遅れ思わぬ迷惑もおかけしたこと，ここにお礼をかねてお詫びしておきたいと思う。

訳者しるす

参 考 文 献

Bernays, P.

〔1〕 'A System of Axiomatic Set Theory', *Journal of symbolic logic, 2,* 65-77 ; *6,* 1-17 ; *7,* 65-89 ; *8,* 89-106 ; *13,* 65-79 ; *19,* 81-96.

Bernays, P. and A. Fraenkel

〔1〕 *Axiomatic Set Theory,* (North-Holland, Amsterdam), 1968.

Beth, E. W.

〔1〕 *The Foundations of Mathematics,* (North-Holland, Amsterdam), 1968.

ブールバキ

〔1〕『数学原論』集合論 1-3（前原昭二編訳）（東京図書）1969.

Carnap, R.

〔1〕 *Meaning and Necessity,* (Univ. Cicago Press), 1956.（邦訳）永井成男他『意味と必然性』（紀伊国屋，東京）1974.

Cohen, P. J.

〔1〕 *Set Theory and the Cotinuum Hypothesis,* (W. A. Benjamin, New York), 1966.（邦訳）近藤，坂井，沢口『連続体仮説』（東京図書）1972.

Fraenkel, A.

*〔1〕 'Der Begriff "definit" und die Abhängigkeit des Auswahlsaxioms', *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaft, Physikalisch-mathematische Klasse,* 253-257, 1922.

Fraenkel, A. and Y. Bar-Hillel and A. Levy

〔1〕 *Foundations of Set Theory,* (North-Holland, Amsterdam), 1973.

石本　新（訳編）

〔1〕『論理思想の革命』（東海大出版会）1972.

Lemon, E. J.
〔1〕 *Introduction to Axiomatic Set Theory*, (Routledge & Kegan Paul), 1968.
(邦訳) 石本，高橋『公理的集合論入門』(東京図書) 1972.

Lewis, C. I. and C. H. Langford
〔1〕 *Symbolic Logic*, 2nd ed., (paper backed, Dover Pub. Inc.), 1959.

Mendelson, E.
〔1〕 *Introduction to Mathematical Logic* (van Nostrand, Princeton N. J.) 1964.

中村秀吉
〔1〕 『パラドックス』(中央公論社) 1972.

Neumann, J. von
*〔1〕 'Eien Axiomatizierung der Mengenlehre', *Journal für die reine und angewandte Mathematik, 154,* 219–240.

Quine, W.
〔1〕 *Mathematical Logic*, rev. ed. (Harvard Univ. Press), 1965.
〔2〕 *From a Logical Point of View?*, (Harvard Univ. Press), 1964, (邦訳) 中山，持丸『論理学的観点から』(岩波，東京) 1972.
〔3〕 *Set Theory and Its Logic*, rev. ed. (Harvard Univ. Press), 1969. (邦訳) 大出，藤村『集合論とその論理』(岩波，東京) 1968.

Skolem, T.
*〔1〕 'Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre', *Matematikerkongressen i Helsingfors den* 4–7 *Juli* 1922, *Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse* (Akademika Bokhanfeln, Helsinki, 1923), 217–232.
*〔2〕 'Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veranderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich', *Videnskapsselskapets skrifter I. Matematisk-naturvidenskabelig Klasse*, no. 6, 1923.

Suppes, P.

〔1〕 *Axiomatic Set Theory*, (van Nostrand, Princeton, N. J.), 1960.

ワイルダー

〔1〕 吉田洋一訳『数学基礎論序説』(培風館, 東京) 1969.

Zermero, E.

*〔1〕 Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Mathematische Annalen* 65, 107–128, 1908.

なお ＊を附した論文は, J. v. Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel, a sourcebook in mathematical logic, 1879-1931*, (Harvard Univ. Press), 1967 に英訳集録されたものを利用した。

事　項　索　引

以下の索引では事項はその主要な出現頁のみを記してある。なお太字は特に定義またはそれに準ずる記述のある頁を示す。（　）内の数字は註または「あとがき」の頁付である。〔→　〕は同義語の相互引照を示す。

ア　　行

カ　　行

サ 行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ　行

ラ　行

ワ 行

<訳者略歴>

富　川　　　滋

1950年　京都大学文学部哲学科卒業
現　在　近畿大学教授
　　　　論理学・科学哲学専攻
著　書　『論理学の基礎』(共著)
　　　　『科学と論理』

素朴集合論

昭和50年9月1日　印刷
昭和50年9月5日　発行

検印省略

定価はカバーに
表示しています

著　者　富　川　　滋
発行者　杉　田　信　夫
印刷者　江　戸　卯　一　郎

発行所　株式会社　ミネルヴァ書房
607　京都市東山区山科日ノ岡堤谷町1
電話代表(075)581—5191番
振替口座・京都8076番

共同印刷工業・酒本製本

Printed in Japan